S.T.E.M.

Μοριοδότηση 2017

Ενδεικτικές απαντήσεις και από γραπτά μαθητών

Θέμα Α

A1 - δ

A2 - γ

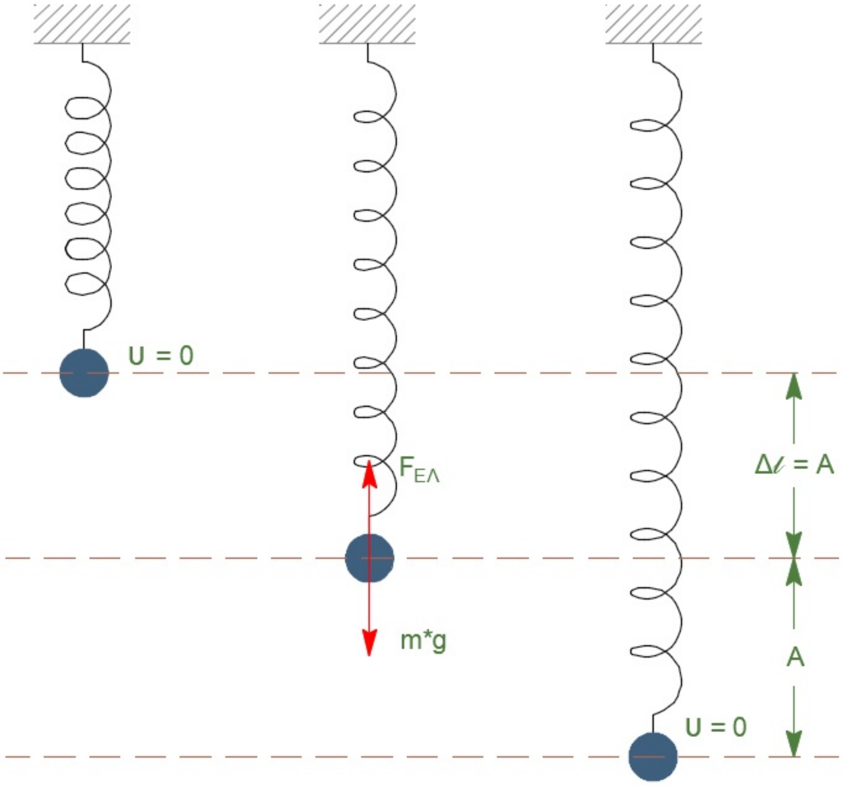
A3 - α

A4 - δ

A5: $\Lambda-\Sigma-\Sigma-\Sigma-\Lambda$

Θέμα Β

B1-(ii)



α) $\underline{\tau\rho\acute{o}\pi o\varsigma}$

$$m, \alpha\alpha\tau:$$
$$(\Theta \mathrm{I})\Sigma F=0 \Rightarrow$$
$$F_{\varepsilon\lambda}-mg=0 \Rightarrow$$
$$k\Delta l=mg \Rightarrow$$
$$\Delta l=\frac{mg}{k}$$

Επειδή στη ΘΦΜ $v=0$, άρα $\Delta l=A$

$$U_{\varepsilon\lambda_{max}}=U_{\varepsilon\lambda(\Gamma')}=\frac{1}{2}k(2A)^2=\frac{1}{2}k4A^2=2k\frac{m^2g^2}{k^2}=\frac{2m^2g^2}{k}$$

άρα σωστό το (ii)

β) $\underline{\tau\rho\acute{o}\pi o\varsigma}$

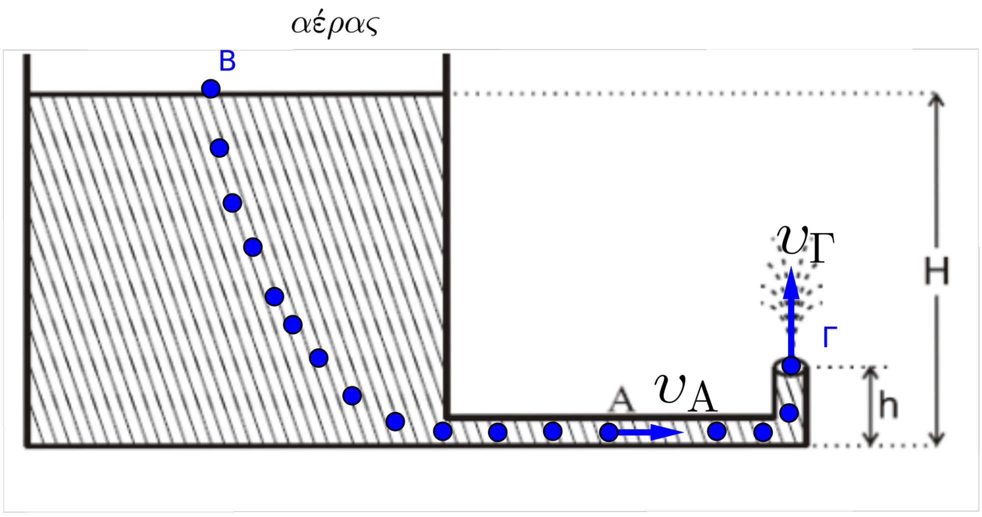
Θ.Μ.Κ.Ε από την θέση Φυσικού Μήκους στην ακραία απομάκρυνση

$$\Delta \mathrm{K} = \Sigma W \Rightarrow K_{\tau\varepsilon\lambda} - \mathrm{K}_{\alpha\rho\chi} = W_F + W_B \Rightarrow 0 - 0 = -\frac{1}{2}\cdot k\cdot y^2 + m\cdot g\cdot y \Rightarrow y(m\cdot g - \frac{1}{2}\cdot k\cdot y) = 0$$

$$y = \frac{2\cdot m\cdot g}{k}$$

$$U_{\varepsilon\lambda_{max}} = \frac{1}{2}\cdot k\cdot y^2 \Rightarrow U_{\varepsilon\lambda_{max}} = \frac{2m^2g^2}{k}$$

B2 - $(\iota\iota\iota)$



α) $\underline{\tau\rho\acute{o}\pi o\varsigma}$

Από εξίσωση Bernoulli: $\mathrm{B} \to \Gamma$

$$P_B + \frac{1}{2}\rho v_{\mathrm{B}}^2 + \rho g H = P_\Gamma + \frac{1}{2}\rho v_\Gamma^2 + \rho g h \xRightarrow[v_{\mathrm{B}}=0]{P_{\mathrm{B}}=P_\Gamma=P_{at}}$$

$$\rho g 5h = \frac{1}{2}\rho v_\Gamma^2 + \rho g h \Rightarrow v_\Gamma^2 = 8gh \Rightarrow v_\Gamma = 2\sqrt{2gh}$$

Σύμφωνα με την εξίσωση συνέχειας, η παροχή είναι ίδια για όλα τα σημεία του σωλήνα. Άρα η παροχή στα σημεία Α και Γ είναι

$$\Pi_{\mathrm{A}} = \Pi_{\mathrm{B}} \Rightarrow A_A v_{\mathrm{A}} = \mathrm{A}_\Gamma v_\Gamma \Rightarrow v_{\mathrm{A}} = v_\Gamma = 2\sqrt{2gh}$$

άρα σωστό το (iii)

β) $\underline{\tau\rho\acute{o}\pi o\varsigma}$

Από εξίσωση Bernoulli: $\mathrm{A} \to \Gamma$

$$P_{\mathrm{A}} + \frac{1}{2}\rho v_{\mathrm{A}}^2 + 0 = P_\Gamma + \frac{1}{2}\rho v_\Gamma^2 + \rho g h \xRightarrow[v_A=v_\Gamma]{P_\Gamma=P_{at}}$$

$$P_A = P_{at} + \rho g h$$

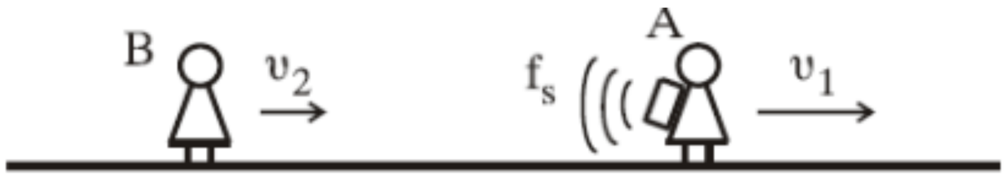
Από εξίσωση Bernoulli: $\mathrm{B} \to A$

$$P_B + \frac{1}{2}\rho v_{\mathrm{B}}^2 + \rho g H = P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + 0 \Rightarrow P_B + \frac{1}{2}\rho v_{\mathrm{B}}^2 + \rho g 5h = P_{at} + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v_{\mathrm{A}}^2$$

$$\rho g 5h = \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h \Rightarrow v_A^2 = 8gh \Rightarrow v_A = 2\sqrt{2gh}$$

άρα σωστό το (iii)

B3 - $(\iota\iota)$



α) $\underline{\tau\rho\acute{o}\pi o\varsigma}$

Ο παρατηρητής B πλησιάζει την πηγή A και η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή B άρα θα ισχύει

$$f_{\mathrm{B}}=\frac{\upsilon_{\eta\chi}+\upsilon_2}{\upsilon_{\eta\chi}+\upsilon_1}f_s=\frac{\upsilon_{\eta\chi}+\dfrac{\upsilon_{\eta\chi}}{10}}{\upsilon_{\eta\chi}+\dfrac{\upsilon_{\eta\chi}}{5}}f_s=\frac{\dfrac{11\upsilon_{\eta\chi}}{10}}{\dfrac{6\upsilon_{\eta\chi}}{5}}f_s=\frac{11\cdot 5}{10\cdot 6}f_s=\frac{11}{12}f_s$$

άρα σωστό το (ii)

β) $\underline{\tau\rho\acute{o}\pi o\varsigma}$

Όταν ο παρατηρητής B πλησιάζει προς την πηγή φτάνουν σε αυτόν περισσότερα μέγιστα στη μονάδα του χρόνου απο όσα παράγει στον ίδιο χρόνο η πηγή. Η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται ο ήχος ως προς τον παρατηρητή είναι $\upsilon_{\eta\chi}+\upsilon_2$ και η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι

$$f_B=\frac{\upsilon_{\eta\chi}+\upsilon_2}{\upsilon}\cdot f_s$$

Όταν η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή, η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται ο ήχος ως προς τον αέρα θα είναι πάλι $\upsilon_{\eta\chi}$, αφού εξαρτάται μόνο από το μέσον διάδοσης, ενώ το μήκος κύματος που φτάνει στον παρατηρητή αυξάνεται. Ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα στην εκπομπή δύο μεγίστων είναι μία περίοδος T. Αν τη στιγμή t η πηγή εκπέμπει ένα μέγιστο, τη στιγμή $t+\Delta t$ το μέγιστο θα έχει απομακρυνθεί από τον παρατηρητή κατά λ αλλά και η πηγή θα έχει απομακρυνθεί κατά $\upsilon_1\cdot\mathrm{T}$. Η απόσταση ανάμεσα στα δυο διαδοχικά μέγιστα είναι $\lambda+\upsilon_1\cdot T$. Αυτή την απόσταση αντιλαμβάνεται ως μήκος κύματος ο παρατηρητής. Επομένως

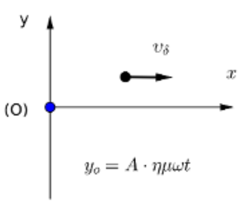
$$\lambda_{\mathrm{B}}=\lambda+\upsilon_1\cdot T\Rightarrow\lambda_{\mathrm{B}}=\frac{\upsilon_{\eta\chi}}{f_s}+\frac{\upsilon_1}{f_s}$$
$$f_B=\frac{\upsilon_{\eta\chi}}{\lambda_{\mathrm{B}}}\Rightarrow f_B=\frac{\upsilon_{\eta\chi}}{\frac{\upsilon_{\eta\chi}+\upsilon_1}{f_s}}\Rightarrow f_B=\frac{\upsilon_{\eta\chi}}{\upsilon_{\eta\chi}+\upsilon_1}\cdot f_s=$$

Συνθέτοντας τις δύο περιπτώσεις κίνησης αφού και η πηγή και ο παρατηρητής κινούνται σε σχέση με το μέσον διάδοσης, η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι

$$f_{\mathrm{B}}=\frac{\upsilon_{\eta\chi}+\upsilon_2}{\upsilon_{\eta\chi}+\upsilon_1}f_s$$

Θέμα Γ

Γ1



$$-A\rightarrow+A:\Delta t=\frac{T}{2}=0,4s\Rightarrow T=0,8s$$

σε Δt η διαταραχή διαδόθηκε σε απόσταση $\Delta x = 4cm = 0,04m$.

$$v_\delta = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0,04}{0,4} = 0,1m/s$$

$$v_\delta = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = 0,08m$$

Το Δm εκτελεί α.α.τ.:

$$D = \Delta m \cdot \omega^2 = \Delta m \frac{4\pi^2}{T^2} = 10^{-6}\frac{4\pi^2}{0,64} = \frac{\pi^2}{16}10^{-4}\frac{N}{m}$$

$$E_T = \frac{1}{2}D \cdot A^2 \Rightarrow 5\pi^2 10^{-7} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{16}10^{-4}A^2$$

$$A^2 = 0,16 \Rightarrow A = 0,4m \ (\pi\lambda\acute{\alpha}\tau o\varsigma)$$

Γ2

Η εξίσωση του κύματος είναι:

$$y_{(x,t)} = A\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = 0,4\eta\mu\left(\frac{5\pi t}{2} - 25\pi x\right) \ \text{(SI)}$$

Στιγμιότυπο την $t_1 = 1,4s$:

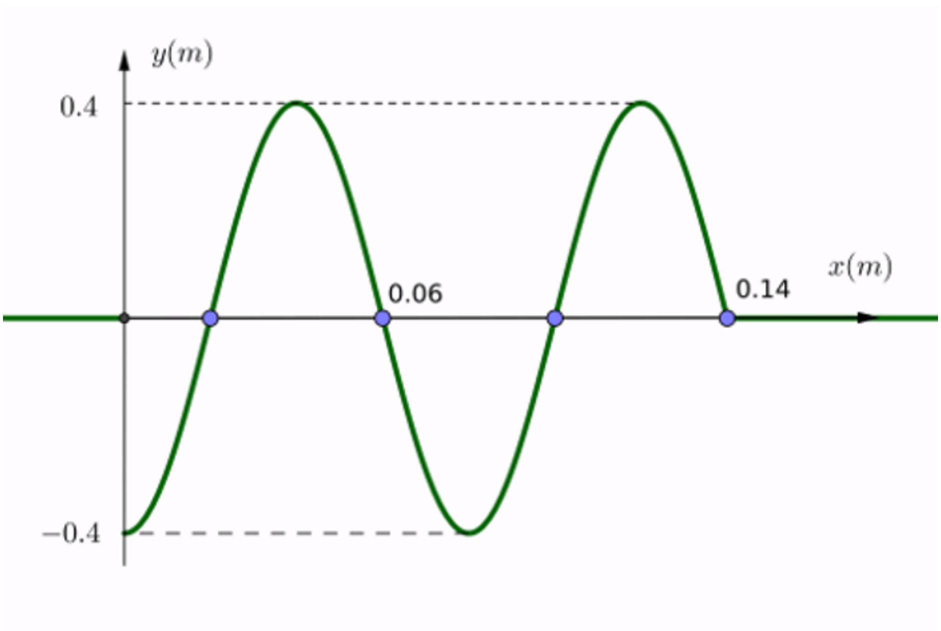
Την t_1 η διαταραχή έφτασε στη θέση

α) $\tau\rho\acute{o}\pi o\varsigma$

$$x_1 = v_\delta t_1 = 0,1 \cdot 1,4 = 0,14m, N_1 = \frac{x_1}{\lambda} = \frac{0,14}{0,08} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4} \ \mu\acute{\eta}\kappa\eta \ \kappa\acute{\upsilon}\mu\alpha\tau o\varsigma$$

β) $\tau\rho\acute{o}\pi o\varsigma$

$$\varphi_{t_1} = 0 \Rightarrow \frac{5\pi \cdot 1,4}{2} - 25\pi x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0,14m$$



$$y_{t_1} = \begin{cases} 0,4\eta\mu\,(3,5\pi - 25\pi x)\,, & 0 \le x \le 0,14m \\ 0, & 0,14m < x \end{cases}$$

$$x = 0, y_0 = 0,4\eta\mu 3,5\pi = -0,4m$$

Γ3

α) $\tau\rho\acute{o}\pi o\varsigma$

$A\Delta E_{\tau\alpha\lambda}$ για Δm

Για $y = 0,2m = \frac{A}{2}$

$$E_T = K + U \Rightarrow E_T = K + \frac{1}{2}Dy^2 \overset{y=\frac{A}{2}}{\Longrightarrow} E_T = K + \frac{1}{2}D\frac{A^2}{4} \Rightarrow$$
$$E_T = K + \frac{1}{4}E_T \Rightarrow K = \frac{3}{4}E_T = \frac{3}{4}5\pi^2 10^{-7} = \frac{3\pi^2}{8}10^{-6}J$$

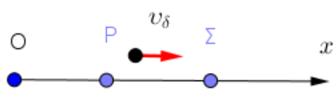
β) *τρόπος*

$$y = A\eta\mu\varphi = \frac{A}{2} \Rightarrow \eta\mu\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{6}, & k = 0,1,2,\ldots(1) \\ 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, & k = 0,1,2,\ldots(2) \end{cases}$$

$$\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu\varphi = \begin{cases} = \omega A\sigma\upsilon\nu\left(2k\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\omega A\sqrt{3}}{2} \\ \omega A\sigma\upsilon\nu\left(2k\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\omega A\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$K = \frac{1}{2}\Delta m \cdot \upsilon^2 = \frac{1}{2}\Delta m\left(\pm\frac{\omega A\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\Delta m \cdot \frac{\omega^2 A^2 3}{4} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}D\cdot A^2 = \frac{3}{4}E_T$$

Γ4



α) *τρόπος*

$$\varphi_P - \varphi_\Sigma = \frac{3\pi}{2}rad, (\varphi_P > \varphi_\Sigma)$$

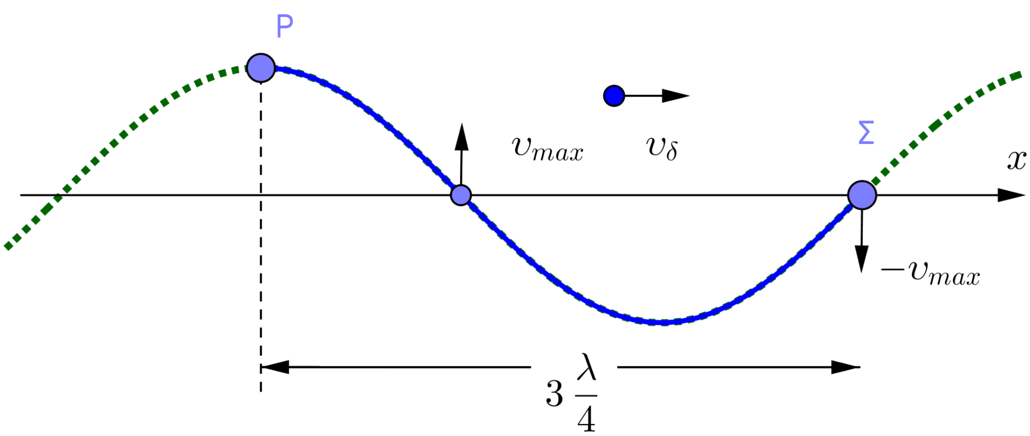
$$\left.\begin{array}{r} y_P = 0,4m = A \\ y_P = A\eta\mu\varphi_P \end{array}\right\} \eta\mu\varphi_P = 1 \implies \varphi_P = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0,1,2,\ldots$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} - \varphi_\Sigma = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \varphi_\Sigma = 2k\pi - \pi$$

Άρα

$$\upsilon_\Sigma = \frac{5\pi}{2}\cdot 0,4\cdot\sigma\upsilon\nu\left(2k\pi - \pi\right) \Rightarrow \upsilon_\Sigma = -\pi\frac{m}{s}$$

β) *τρόπος*



$$\varphi_{\mathrm{P}} - \varphi_{\Sigma} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} \frac{5\pi t}{2} - 25\pi x_{\mathrm{P}} - \left(\frac{5\pi t}{2} - 25\pi x_{\Sigma}\right) = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x_{\Sigma} - x_{\mathrm{P}} = \frac{3}{50} \\ \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x_{\mathrm{P}}}{\lambda} - \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x_{\Sigma}}{\lambda}\right) = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x_{\Sigma} - x_{\mathrm{P}} = \frac{3\lambda}{4} \end{array}\right\}$$

όταν $y_{\mathrm{P}} = A$, $v_{\Sigma} = -\omega A = -\pi \frac{m}{s}$

γ) *τρόπος*

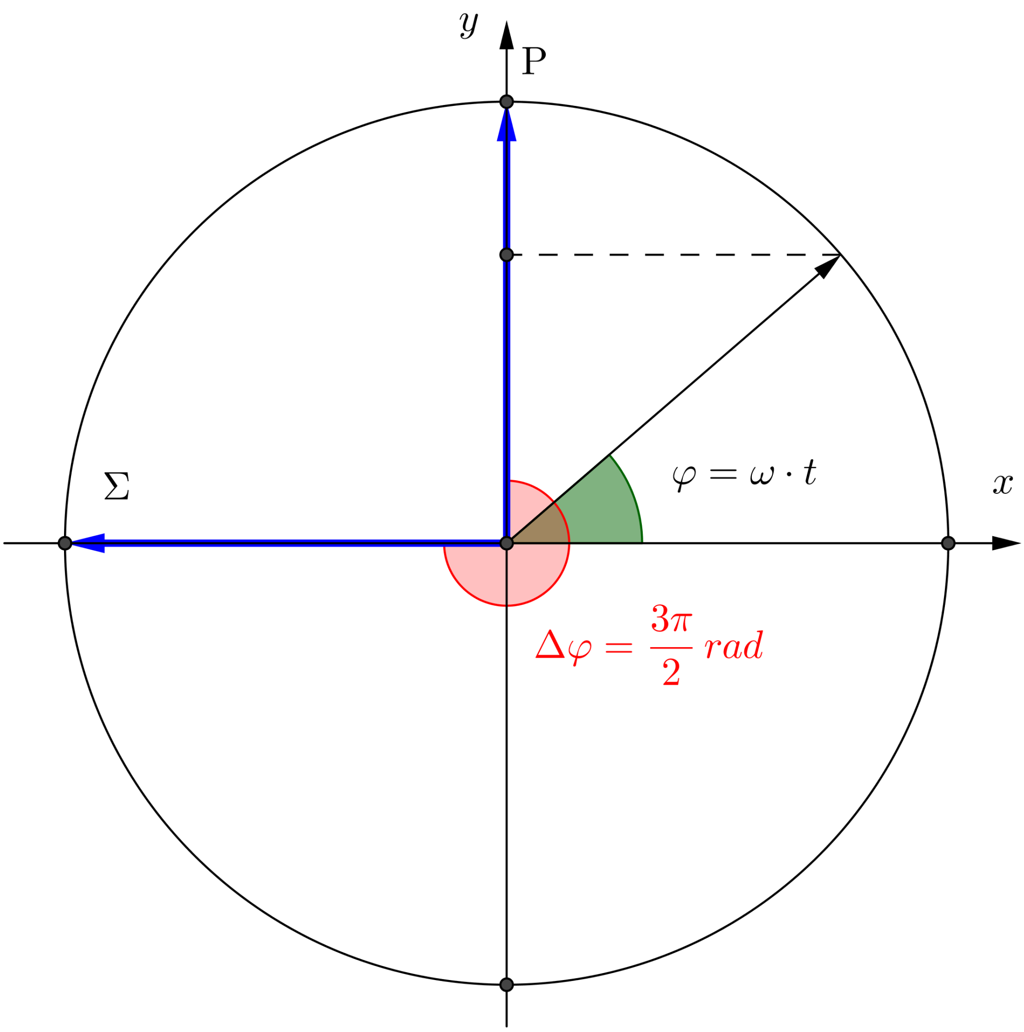
$$\varphi_{\mathrm{P}} - \varphi_{\Sigma} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \varphi_{\Sigma} = \varphi_{\mathrm{P}} - \frac{3\pi}{2}$$

$$y_{\mathrm{P}} = \mathrm{A} \cdot \eta\mu\varphi_{\mathrm{P}} \Rightarrow \eta\mu\varphi_{\mathrm{P}} = 1$$

$$v_{\Sigma} = \mathrm{A}\omega\sigma\upsilon\nu\varphi_{\Sigma} = \mathrm{A}\omega\sigma\upsilon\nu(\varphi_{\mathrm{P}} - \frac{3\pi}{2}) = -\mathrm{A}\omega\eta\mu\varphi_{\mathrm{P}} \Rightarrow v_{\Sigma} = -\pi\frac{m}{s}$$

δ) *τρόπος*

Κάθε μέγεθος που μεταβάλλεται αρμονικά με τον χρόνο μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα περιστρεφόμενο διάνυσμα, το οποίο περιστρέφεται σε σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω και η προβολή του στον κατακόρυφο άξονα yy' δίνεται από την σχέση $y = A\eta\mu\omega t$.



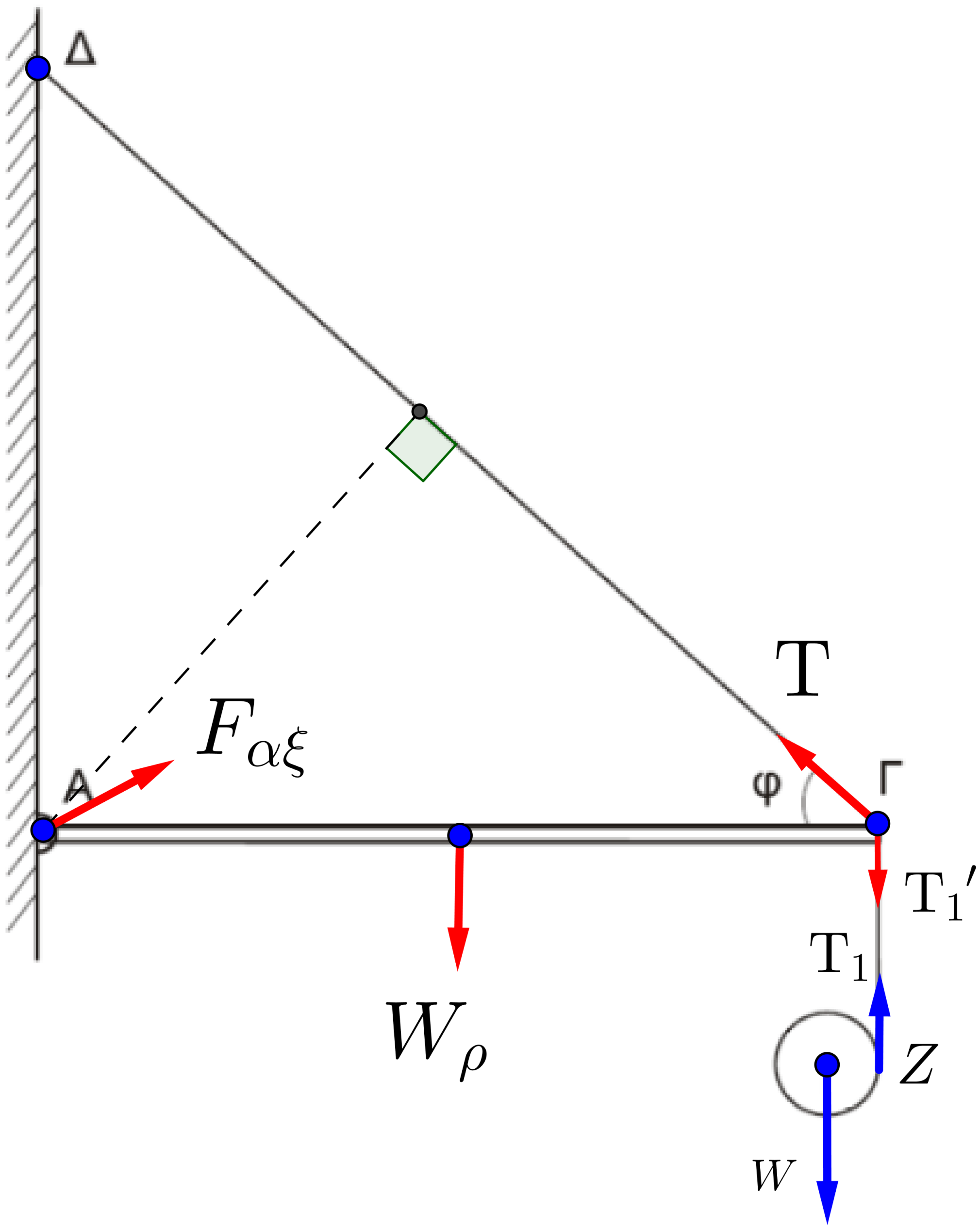
Η διαφορά φάσης των δύο περιστρεφόμενων διανυσμάτων είναι

$$\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2} rad$$

από το σχήμα βγαίνει το συμπέρασμα ότι το σημείο Σ βρίσκεται στην θέση ισορροπίας του και κινείται με φορά προς τον αρνητικό ημιάξονα.

Άρα $v_\Sigma = -\pi \frac{m}{s}$

θέμα Δ



Δ1

α) $\underline{\tau\rho\acute{o}\pi o\varsigma}$

$$0 = v_\Gamma = v_Z = v_{cm} - v_{\gamma\rho_Z} \Rightarrow v_{cm} = \omega R \Rightarrow a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu} \cdot R$$

Ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς το σημείο Z με θεώρημα Steiner

$$I_Z = I_{cm} + m \cdot R^2 \Rightarrow I_Z = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 + m \cdot R \Rightarrow I_Z = \frac{3}{2} \cdot m \cdot R^2$$

$$\Sigma\tau_{\mathrm{Z}} = \mathrm{I_Z} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow m \cdot g \cdot R = \frac{3}{2} \cdot m \cdot R^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{2g}{3} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{20}{3} \frac{m}{s^2}$$

β) $\underline{\tau\rho\acute{o}\pi o\varsigma}$

$$\left.\begin{array}{c}\Sigma F = m \cdot a_{cm} \Rightarrow W - T_1 = m \cdot a_{cm} \\ \Sigma \tau = I \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_1 \cdot R = \frac{1}{2} m R^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}\end{array}\right\}$$

$$T_1 = \frac{m \cdot a_{cm}}{2}, W = \frac{3m \cdot a_{cm}}{2}$$

$$0 = v_\Gamma = v_Z = v_{cm} - v_{\gamma\rho_Z} \Rightarrow v_{cm} = \omega R \Rightarrow a_{cm} =$$

$$a_\gamma R \Rightarrow a_{cm} = \frac{2}{3} g = \frac{20}{3} \frac{m}{s^2}$$

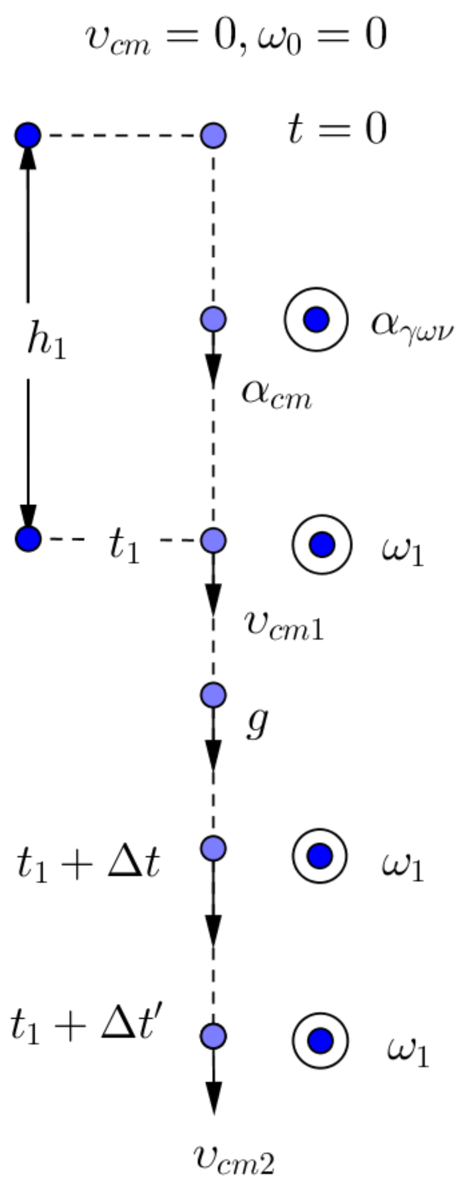
Δ2

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow T_1' = T_1 = \frac{2 \cdot 20}{2 \cdot 3} = \frac{20}{3} N$$

3ος Νόμος του Νεύτωνα και νήμα αβαρές μη εκτατό Για τη ράβδο που ισορροπεί:

$$\Sigma_{\tau_{(A)}} = 0 \Rightarrow w_\rho \cdot \frac{l}{2} + T_1' \cdot l - T \cdot l \cdot \eta\mu\varphi = 0 \Rightarrow T = \frac{100}{3} N$$

Δ3



α) $\underline{\tau\rho\acute{o}\pi o\varsigma}$

Την t_1, $h_1 = 0,3m$

$$h_1 = \frac{1}{2}a_{cm}t_1^2 \Rightarrow 0,3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{20}{3}t_1^2 \Rightarrow t_1 = 0,3s$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{a_{cm}}{R} = \frac{200}{3}r/s^2$$

$$w_1 = a_{\gamma\omega\nu}t_1 = 20r/s$$

$$t \to t_1 + \Delta t:$$

$$\tau_{w_{cm}} = 0 = \frac{\Delta L}{\Delta t} \Rightarrow L_{t_1} = L_{t_1+\Delta_t}$$

Η μόνη δύναμη που ασκείται στο δίσκο είναι το βάρος W.

Όπου

$$L_{t_1} = I\cdot\omega_1$$

$$I = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 0,1^2 = 0,01kgm^2$$

Άρα

$$L_{t_1} = 0,2kg\frac{m^2}{s} = L_{t_1+\Delta t}$$

β) $\underline{\tau\rho\acute{o}\pi o\varsigma}$

$$\Theta\text{ΜΚΕ}_{(0\to h_1)}:$$

$$\left.\begin{array}{c}\mu\varepsilon\tau\text{:}\ \frac{1}{2}mv_{cm1}^2 - 0 = W\cdot h_1 - T_1\cdot h_1\\ \sigma\tau\rho\text{:}\ \frac{1}{2}I\omega_1^2 - 0 = +(T_1\cdot R)\cdot\theta_1\\ v_{cm1} = \omega_1\cdot R\\ x_{cm} = \theta\cdot R \Rightarrow h_1 = \theta_1\cdot R\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_{cm1}^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 = mgh_1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}v_{cm1}^2 + \frac{1}{4}\cdot v_{cm1}^2 = gh_1 \Rightarrow v_{cm1}^2 = \frac{4gh_1}{3} \Rightarrow$$

$$v_{cm1} = 2m/s \Rightarrow \omega_1 = 20r/s$$

$$\Rightarrow L_{t_1} = I\omega_1 = 0,2kg\frac{m^2}{s} \Rightarrow L_{t_1} = 0,2kg\frac{m^2}{s}$$

γ) $\underline{\tau\rho\acute{o}\pi o\varsigma}$

Η δύναμη T_1 δε μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της, αφού κάθε στιγμή ασκείται σε διαφορετικό σημείο του δίσκου, λειτουργεί δηλαδή όπως η στατική τριβή στη Κ.Χ.Ο. Επομένως η μηχανική ενέργεια του δίσκου διατηρείται.

$$\text{Α}\Delta\text{ΜΕ}_{(0,h_1)}:$$

$$K_{(0)} + U_{(0)} = K_{(t_1)} + U_{(t_1)}$$

$$0 + mgh_1 = \left(\frac{1}{2}mv_{cm1}^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2\right) + 0$$

$$mgh_1 = \frac{1}{2}m\omega_1^2R^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2$$

$$mgh_1 = I\omega_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 = 3\cdot\frac{1}{2}I\omega_1^2$$

$$\left.\begin{array}{c}\left.\begin{array}{c}K_{\sigma\tau\rho} = \frac{1}{2}I\omega_1^2\\ L = I\omega_1\end{array}\right\} K_{\sigma\tau\rho} = \frac{L^2}{2I}\\ mgh_1 = 3K_{(\sigma\tau\rho)}\end{array}\right\}\Rightarrow mgh_1 = \frac{3L^2}{2I}$$

$$9\cdot 10\cdot 0,3 = \frac{3L_{t_1}^2}{2\cdot 0,01} \Rightarrow L_{t_1} = 0,2kg\frac{m^2}{s}$$

Δ4

$$t_2 = t_1 + \Delta t:$$

$$\frac{K_{\sigma\tau\rho(t_2)}}{K_{\mu\epsilon\tau(t_2)}} = \frac{\frac{1}{2}I\omega_2^2}{\frac{1}{2}mv_{cm_2}^2}$$

$$t_1 = t_2 :$$

$$\Sigma\tau_{cm} = 0 \Rightarrow \omega_2 = \omega_1 = 20r/s$$

$$\Sigma F = m \cdot a_{cm} \Rightarrow W = m \cdot a_{cm} \Rightarrow a_{cm} = g = 10m/s^2$$

$$v_{cm_2} = v_{cm_1} + g \cdot \Delta t' = 2 + 10 \cdot 0,1 = 3m/s$$

$$\frac{K_{\pi\epsilon\rho}}{K_{\mu\epsilon\tau}} = \frac{\frac{1}{2}I\omega^2}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{\frac{1}{2}mR^2\omega_2^2}{mv_2^2} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{K_{\pi\epsilon\rho}}{K_{\mu\epsilon\tau}} = \frac{2}{9}$$

Published
13 June 2017

Category
Άσκηση

Tags

Βαθμολογικό 3