S.T.E.M.

Μοριοδότηση 2016

Ενδεικτικές απαντήσεις και από γραπτά μαθητών

Θέμα Α

A1 - β

A2 - γ

A3 - β

A4 - δ

A5: $\Sigma - \Lambda - \Sigma - \Lambda - \Lambda$

Θέμα Β

B1 - $(\iota\iota\iota)$

α) $\underline{\text{τρόπος}}$

Ο ακίνητος παρατηρητής ακούει απευθείας απο τη σειρήνα του τρένου συχνότητα

$$f_1 = \frac{u_{\eta\chi}}{u_{\eta\chi} + u_s} \cdot f_s$$

Ο ήχος της σειρήνας του τρένου φτάνει στον βράχο

$$f_{\beta\rho\alpha\chi} = \frac{u_{\eta\chi}}{u_{\eta\chi} - u_s} \cdot f_s$$

Ο παρατηρητής ακούει αυτόν τον ήχο με συχνότητα

$f_2 = f_{\beta\rho\alpha\chi}$ (ακίνητος παρατηρητής - ακίνητος βράχος)

άρα

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{u_{\eta\chi}}{u_{\eta\chi}+u_s} \cdot f_s}{\frac{u_{\eta\chi}}{u_{\eta\chi}-u_s} \cdot f_s}$$

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{u_{\eta\chi} - \frac{u_{\eta\chi}}{10}}{u_{\eta\chi} + \frac{u_{\eta\chi}}{10}} = \frac{9}{11}$$

β) τρόπος

Ο ακίνητος παρατηρητής ακούει απευθείας απο τη σειρήνα του τρένου μήκος κύματος

$$\lambda_1 = \lambda + u_s \cdot T_s$$

Ο ήχος της σειρήνας του τρένου φτάνει στον βράχο

$$\lambda_{\beta\rho\alpha\chi} = \lambda - u_s \cdot T_s$$

Ο παρατηρητής ακούει αυτόν τον ήχο με μήκος κύματος

$\lambda_2 = \lambda_{\beta\rho\alpha\chi}$ (ακίνητος παρατηρητής - ακίνητος βράχος)

άρα

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\lambda + u_s \cdot T_s}{\lambda - u_s \cdot T_s} = \frac{\frac{u_{\eta\chi}+u_s}{f_s}}{\frac{u_{\eta\chi}-u_s}{f_s}}$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{u_{\eta\chi} + \frac{u_{\eta\chi}}{10}}{u_{\eta\chi} - \frac{u_{\eta\chi}}{10}} = \frac{11}{9}$$

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{u_{\eta\chi}}{\lambda_1}}{\frac{u_{\eta\chi}}{\lambda_2}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{9}{11}$$

Άρα η σωστή απάντηση είναι το $(\iota\iota\iota)$

Β2 - (ι)

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος θα είναι

$$y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu(\frac{2\pi\chi}{\lambda}) \cdot \eta\mu(\frac{2\pi t}{T})$$

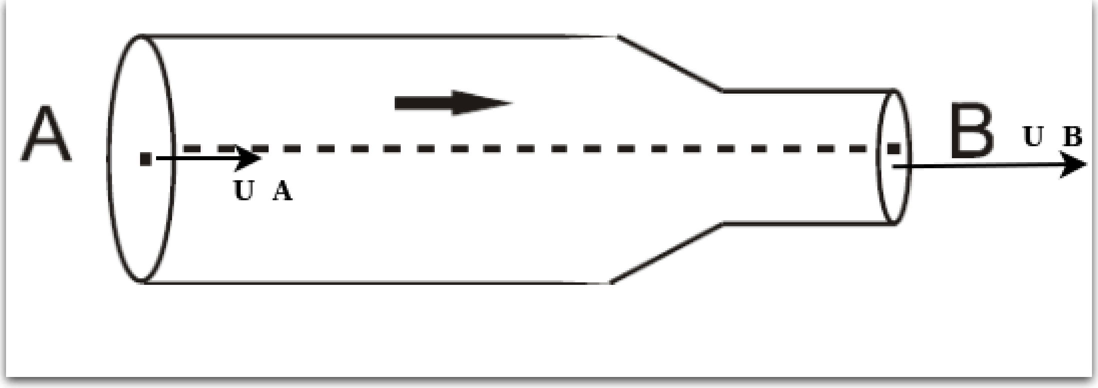
Το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας ταλάντωσης u_{max_M} του σημείου Μ της χορδής ($x_M = \frac{9\lambda}{8}$)

είναι ίσο με:

$$u_{max_M} = \omega \cdot |A'_M| = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} \cdot |2A\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi\frac{9\lambda}{8}}{\lambda}| = \frac{4\pi\mathrm{A}}{\mathrm{T}} \cdot |\sigma\upsilon\nu\frac{9\pi}{4}| = \frac{2\cdot\sqrt{2}\pi\mathrm{A}}{\mathrm{T}}$$

Άρα η σωστή απάντηση είναι το (ι)

Β3 - $(\iota\iota)$



Επειδή το ρευστό είναι ασυμπίεστο και η ροή του είναι στρωτή η παροχή του σωλήνα διατηρείται σταθερή και ισχύει η εξίσωση της συνέχειας:

$$\mathrm{A}_A \cdot u_A = A_B \cdot u_B \Rightarrow 2 \cdot A_B \cdot u_A = A_B \cdot u_B \Rightarrow 2 \cdot u_A = u_B$$

Για ιδανικό ρευστό η κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου είναι:

$$\Lambda = \frac{dK}{dV} = \frac{\frac{1}{2} \cdot dm \cdot u^2}{dV} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u^2$$

α) τρόπος

Εφόσον ο σωλήνας είναι οριζόντιος η εξίσωση του Bernoulli παίρνει την ακούλουθη μορφή:

$$P_A + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_A^2 = P_B + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_B^2 \Rightarrow P_A - P_B = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_B^2 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_A^2$$

$$P_A - P_B = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot 4 \cdot u_A^2 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_A^2 = 4\Lambda - \Lambda = 3\Lambda$$

β) τρόπος

Θ.Ε.Ε. $\mathrm{A} \rightarrow B$ για dt:

$$W + W_B = dK$$

όπου W το έργο που προσφέρεται στο τμήμα του ρευστού από το Α στο Β από το περιβάλλον ρευστό, δηλαδή $W = (P_A - P_B) \cdot dV, W_B = 0$ και

$$dK = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot u_B^2 - \frac{1}{2} \cdot dm \cdot u_A^2$$

Τελικά

$$(P_A - P_B) \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot u_B^2 - \frac{1}{2} \cdot dm \cdot u_A^2 \Rightarrow P_A - P_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{dm}{dV} \cdot u_B^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{dm}{dV} \cdot u_A^2$$

$$(P_A - P_B) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_B^2 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_A^2 = \frac{1}{2} \cdot \rho(2u_A)^2 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_A^2 = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_A^2 = 3\Lambda$$

Άρα η σωστή απάντηση είναι το (ιι)

Θέμα Γ

Λείο τεταρτοκύκλιο ΑΓ

R = 5m

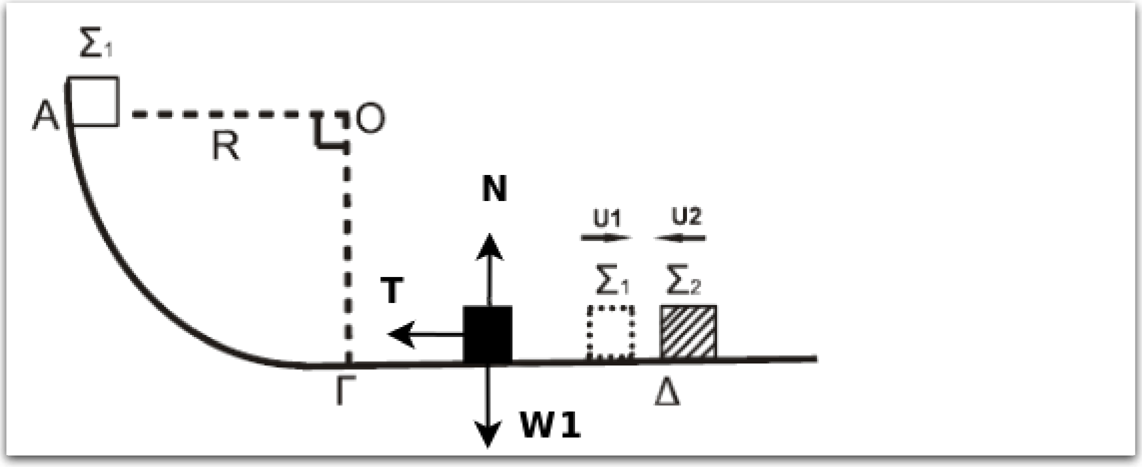
μ = 0.5

ΓΔ = $S_1 = 3.6m$

μάζες $m_2 = 3 \cdot m_1$

και $u_2 = 4\frac{m}{s}$

Γ1



Α.Δ.Μ.Ε. $(\text{Α}, \Gamma)(m_1)$

$$\text{K}_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \Rightarrow 0 + m_1 \cdot g \cdot R = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot u_o^2 + 0 \Rightarrow u_o = \sqrt{2 \cdot g \cdot R} \Rightarrow u_o = 10\frac{m}{s}$$

Γ2

α) $\underline{\text{τρόπος}}$

Θ.Μ.Κ.Ε. $\Gamma \rightarrow \Delta(m_1)$

$$K_\Delta - \text{K}_\Gamma = W_T \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot u_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot u_o^2 = -\mu \cdot m_1 \cdot g \cdot S_1 \Rightarrow u_1 = 8\frac{m}{s}$$

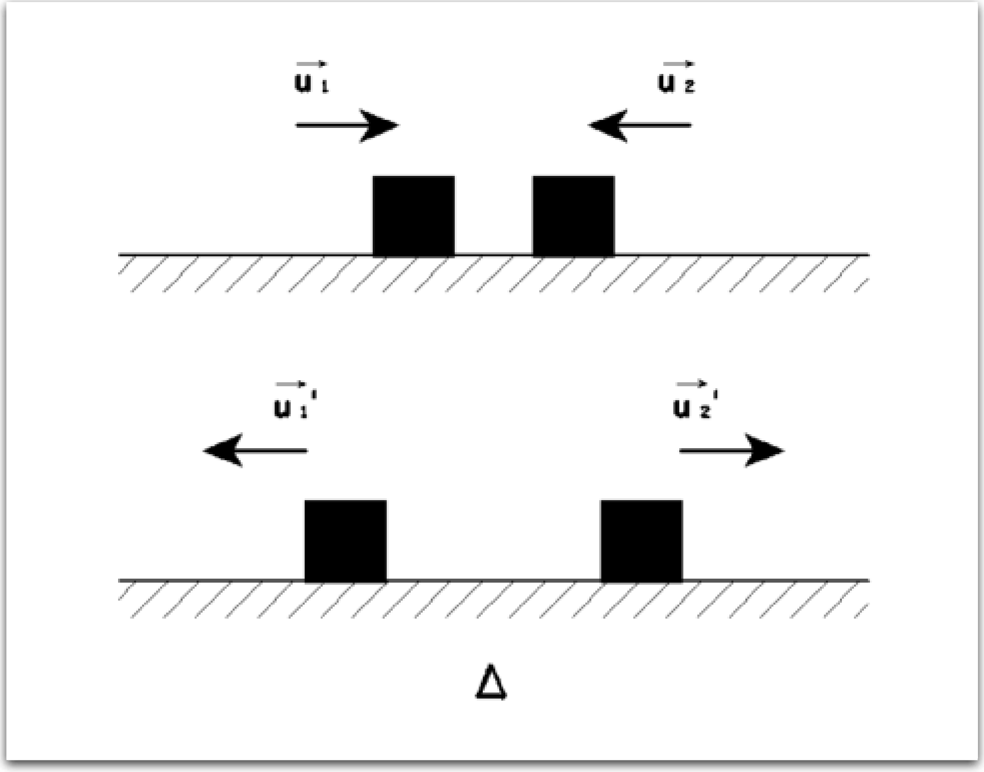
β) $\underline{\text{τρόπος}}$

$$\Sigma F = m \cdot \alpha \Rightarrow T = m \cdot \alpha \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g = m \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = 5\frac{m}{s^2}$$

$$S_1 = u_o \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \Rightarrow 5 \cdot t^2 - 20 \cdot t + 7.2 = 0$$

$$t = \frac{20 \pm 16}{10} = \begin{cases} 0.4 \\ 3.6, \quad \text{απορρίπτεται} \end{cases}$$

$$u_1 = u_o - \alpha \cdot t \Rightarrow u_1 = 8\frac{m}{s}$$



α) τρόπος

Τα m_1, m_2 συγκρούονται στο Δ κεντρικά και ελαστικά. Από ΑΔΟ και ΔΚΕ προκύπτει:

$$u_1' = \frac{2m_2 \cdot (-u_2) + (m_1 - m_2) \cdot u_1}{m_1 + m_2} = -10\frac{m}{s} \Rightarrow |u_1'| = 10\frac{m}{s}$$

$$u_2' = \frac{2m_1 \cdot u_1 + (m_2 - m_1) \cdot (-u_2)}{m_1 + m_2} = +2\frac{m}{s} \Rightarrow |u_2'| = 2\frac{m}{s}$$

β) τρόπος

ΑΔΟ

$$\overrightarrow{p_{\pi\rho\iota\nu}} = \overrightarrow{p_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}} \Rightarrow m_1 \cdot u_1 - m_2 \cdot u_2 = -m_1 \cdot u_1' + m_2 \cdot u_2' \Rightarrow u_1' = 4 + 3 \cdot u_2'$$

ΔΚΕ

$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot u_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot u_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot u_1'^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot u_2'^2 \Rightarrow 112 = u_1'^2 + 3 \cdot u_2'^2$$

Αντικαθιστώντας την προηγούμενη σχέση φτάνουμε στην δευτεροβάθμια

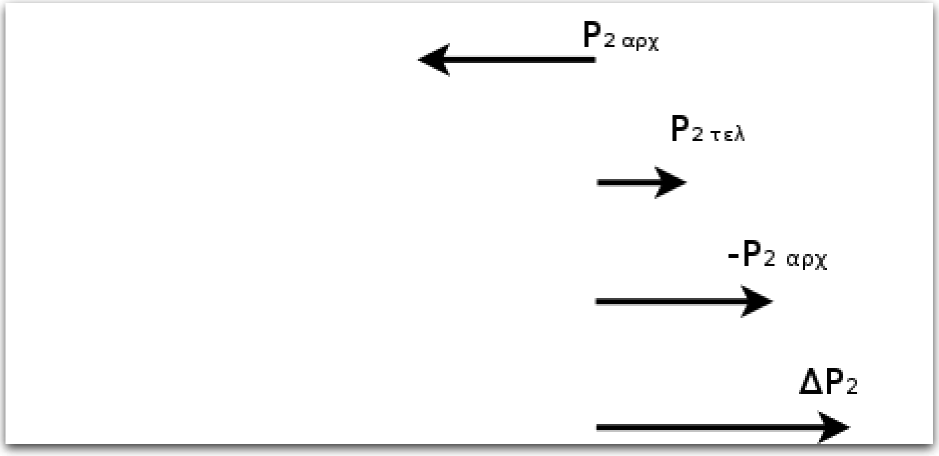
$$u_2'^2 + 2 \cdot u_2' - 8 = 0$$

$$u_2' = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 2 \\ -4, & \text{απορρίπτεται} \end{cases}$$

οπότε

$$u_1' = 4 + 3 \cdot u_2' \Rightarrow u_1' = 10\frac{m}{s}$$

Γ3



μάζα $m_2 = 3kg$

$$\Delta\vec{P}_2 = \vec{P}_{2\tau\varepsilon\lambda} - \vec{P}_{2\alpha\rho\chi} = \vec{P}_{2\tau\varepsilon\lambda} + (-\vec{P}_{2\alpha\rho\chi})$$

$$\Delta P_2 = m_2 \cdot u_2' - (-m_2 \cdot u_2) = m_2 \cdot (u_2' + u_2) \Rightarrow \Delta P_2 = 18kg \cdot \frac{m}{s}$$

Γ4

Το ποσοστό επι τοις εκατό της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του m_1 κατά την κρούση είναι:

$$\Pi(\%) = \frac{\Delta K_1}{K_{1\alpha\rho\chi}} \cdot 100\% = \frac{\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (u_1'^2 - u_1^2)}{\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot u_1^2} \cdot 100\% = (\frac{u_1'^2}{u_1^2} - 1) \cdot 100\% = 56.25\%$$

Θέμα Δ

ΒΓ Λείο κεκλιμένο δάπεδο με γωνία κλίσης $\varphi = 30^o$

σώμα μάζας $m = 1kg$

σταθερά ελατηρίου $k = 100\frac{N}{m}$

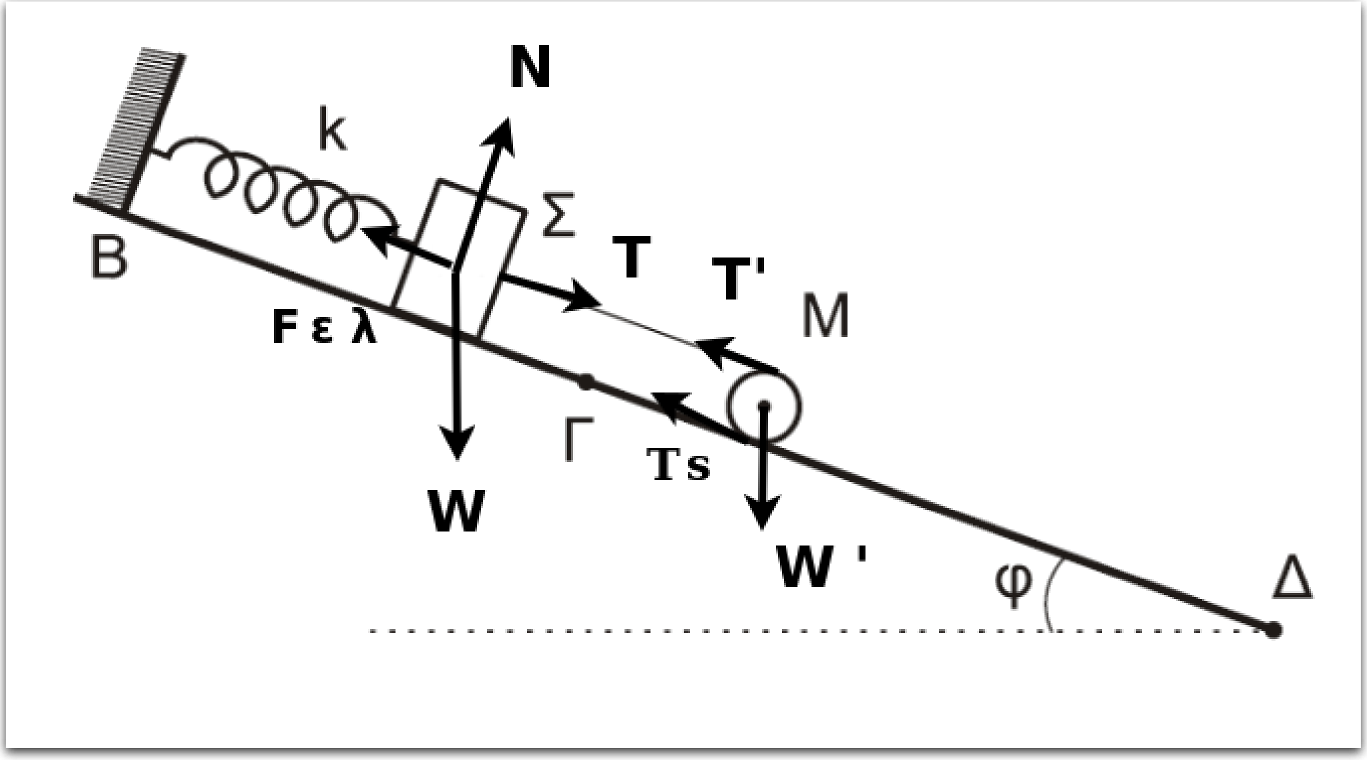
μάζα κυλίνδρου $M = 2kg$

ακτίνα κυλίνδρου $R = 0.1m$

ροπή αδράνειας $I_{cm} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2$

σταθερά $g = 10\frac{m}{s^2}$

Δ1



Ο κύλινδρος ισορροπεί

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow T' + T_{\sigma\tau} - M \cdot g \cdot \eta\mu\varphi = 0$$
$$\Sigma\tau = 0 \Rightarrow T' \cdot R - T_{\sigma\tau} R = 0$$
$$2T' = M \cdot g \cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow T' = 5N$$

$\mathrm{T}' = \mathrm{T}$ (3ος Ν. Νεύτωνα, νήμα αβαρές μη εκτατό)

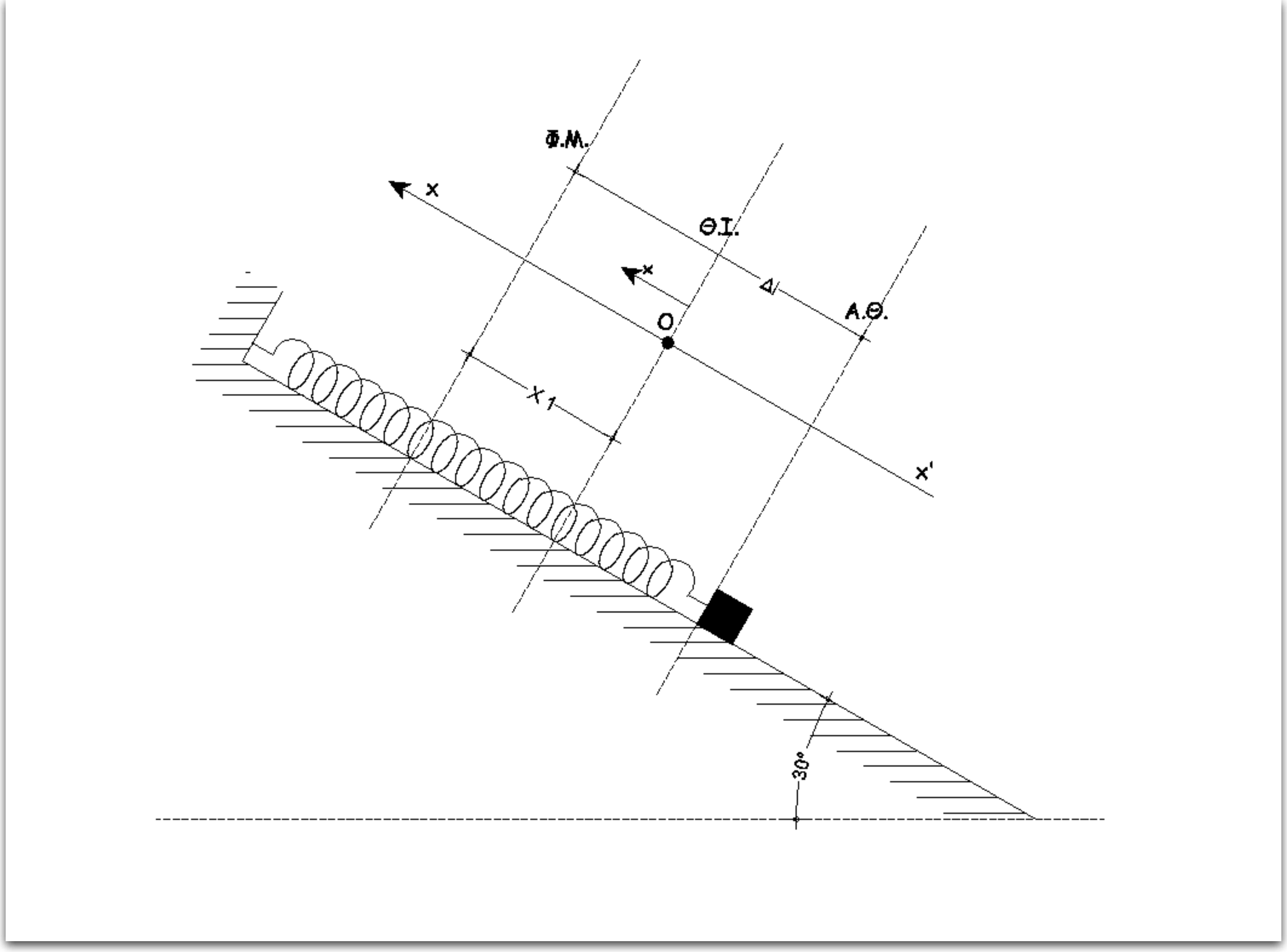
m ισορροπεί

$$F_{\varepsilon\lambda} - m \cdot g \cdot \eta\mu\varphi - \mathrm{T} = 0$$
$$F_{\varepsilon\lambda} = k \cdot \Delta l$$

Άρα

$$\Delta l = \frac{m \cdot g \cdot \eta\mu\varphi + \mathrm{T}}{k} = 0.1m$$

Δ2



Αφού κοπεί το νήμα το m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με θέση ισορροπίας το Ο

$$D = k = m \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = 10\frac{r}{s}$$

Για την $\Theta\mathrm{I}(O)$:

$$F_{\varepsilon\lambda(o)} - m \cdot g \cdot \eta\mu\varphi = 0 \Rightarrow k \cdot x_1 - m \cdot g \cdot \eta\mu\varphi = 0 \Rightarrow x_1 = 0.05m$$

Την $t = 0$ το m βρίσκεται στο Γ με $u = 0$ άρα το πλάτος ταλάντωσης είναι:

$$\mathrm{A} = \Delta l - x_1 \Rightarrow A = 0.05m$$

$$x_\Gamma = -\mathrm{A}$$

Η χρονική συνάρτηση της απομάκρυνσης του σώματος από την θέση ισορροπίας είναι

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \varphi_o)$$

Την $t = 0$:

$$-\mathrm{A} = \mathrm{A} \cdot \eta\mu\varphi_o \Rightarrow \eta\mu\varphi_o = \eta\mu\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \varphi_o = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$$

$$0 \leq \varphi o < 2\pi$$

Άρα $\varphi o = \frac{3\pi}{2} rad$

Επομένως $x = 0.05 ημ(10t + \frac{3\pi}{2})$ στο SI

α) $\underline{τρόπος}$

$$F_{επ} = -D \cdot x = -100 \cdot 0.05 ημ(10t + \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow F_{επ} = -5 \cdot ημ(10t + \frac{3\pi}{2})(SI)$$

β) $\underline{τρόπος}$

$$F_{επ} = \Sigma F = F_{ελ} - m \cdot g \cdot ημφ = k(x_1 - x) - m \cdot g \cdot ημφ = kx_1 - kx - m \cdot g \cdot g \cdot ημφ$$
$$F_{επ} = -k \cdot x \Rightarrow F_{επ} = -5 \cdot ημ(10t + \frac{3\pi}{2})(SI)$$

Δ3

Μόλις κοπεί το νήμα ο κύλινδρος εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση στο κεκλιμένο δάπεδο ΓΔ. Το σώμα αφού εκτελέσει Ν περιστροφές έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα ω.

$$N = \frac{12}{\pi} = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \Rightarrow \Delta\theta = 24 rad$$

Η στροφορμή που θα έχει ο κύλινδρος θα είναι

$$L = I_{cm} \cdot \omega$$
$$I_{cm} = \frac{1}{2} M \cdot R^2 = 0.01 kgm^2$$

Για την εύρεση του ω:

α) $\underline{τρόπος}$

Κύλιση χωρίς ολίσθηση $\rightarrow$ η τριβή δεν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της αφού κάθε στιγμή ασκείται σε διαφορετικό σημείο του κυλίνδρου δηλαδή είναι στατική τριβή.

Στην παραπάνω κίνηση διατηρείται η μηχανική ενέργεια του κυλίνδρου

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow 0 + M \cdot g \cdot h = (\frac{1}{2} \cdot M \cdot u_{cm}^2 + \frac{1}{2} \cdot I_{cm} \cdot \omega^2) + 0$$
$$h = x_{cm} \cdot ημφ$$
$$x_{cm} = \Delta\theta R$$

άρα $h = 24 \cdot 0.1 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow h = 1.2m$

$$u_{cm} = \omega \cdot R$$

αντικαθιστώντας έχουμε

$$2 \cdot 10 \cdot 1.2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \omega^2 \cdot 0.01 + \frac{1}{2} \cdot 0.01 \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = 40\frac{r}{s}$$

οπότε

$$L = 0.01 \cdot 40 \Rightarrow L = 0.4\frac{kg \cdot m^2}{s}$$

β) τρόπος

Μεταφορική:

$$M \cdot g \cdot \eta\mu\varphi - \mathrm{T}_{\sigma\tau} = \mathrm{M} \cdot \alpha_{cm}$$

Στροφική:

$$\mathrm{T}_{\sigma\tau} \cdot R = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

Κύλιση χωρίς ολίσθηση:

$$\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R$$

Άρα

$$\mathrm{M} \cdot g \cdot \eta\mu\varphi = \frac{3}{2} \cdot M \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{10}{3}\frac{m}{s^2}$$

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{100}{3}\frac{r}{s^2}$$

$$\Delta\theta = \frac{1}{2} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t^2 \Rightarrow t = 1.2s$$

$$\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t = 40\frac{r}{s}$$

Δ4

για $t' = 3s$

α) τρόπος

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dK}{dt}_{\mu\varepsilon\tau} + \frac{dK}{dt}_{\pi\varepsilon\rho} = \Sigma F \cdot u_{cm} + \Sigma\tau \cdot \omega = \mathrm{M} \cdot \alpha_{cm} \cdot u_{cm} + I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \omega$$

$$\frac{dK}{dt} = \mathrm{M} \cdot \alpha_{cm}^2 \cdot t' + I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}^2 \cdot t' = 100\frac{J}{s}$$

β) <u>τρόπος</u>

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dK}{dt}_{\mu\epsilon\tau} + \frac{dK}{dt}_{\pi\epsilon\rho} = (W_x - T_{\sigma\tau}) \cdot u_{cm} + (T_{\sigma\tau} \cdot R) \cdot \omega$$

ΚΧΟ:

$$u_{cm} = \omega \cdot R$$

άρα

$$\frac{dK}{dt} = W_x \cdot u_{cm} - T_{\sigma\tau}u_{cm} + T_{\sigma\tau}u_{cm} = W_x \cdot u_{cm} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 100\frac{J}{s}$$

γ) <u>τρόπος</u>

$$\mathrm{K} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot u^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \omega^2 \cdot R^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2\omega^2 = \frac{3}{4} \cdot M \cdot R^2\omega^2$$

Αφού $\omega = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t$

$$K = \frac{3}{4} \cdot M \cdot R^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}^2 \cdot t^2 = \frac{100}{6} \cdot t^2(SI)$$

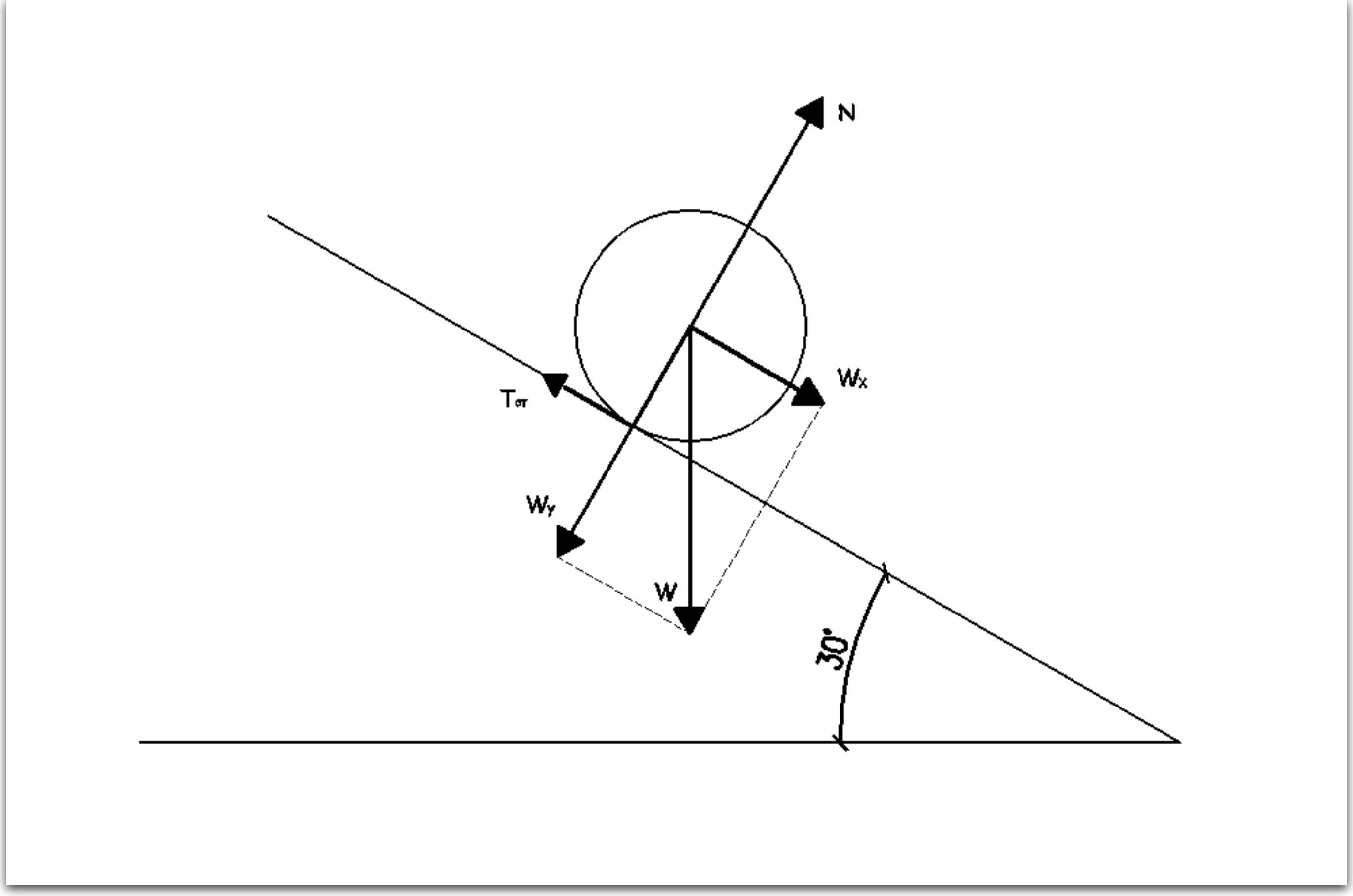
Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{100}{6} \cdot 2 \cdot t = \frac{100}{3} \cdot t(SI)$$

και για $t = 3s$

$$\frac{dK}{dt} = 100\frac{J}{s}$$

δ) <u>τρόπος</u>



Έστω Α το σημείο επαφής του κυλίνδρου με το κεκλιμένο επίπεδο. Θεωρούμε στιγμιαίο άξονα περιστροφής οριζόντιο που διέρχεται από το σημείο Α. Ο κύλινδρος εκτελεί μόνο περιστροφική κίνηση γύρω από τον στιγμιαίο άξονα περιστροφής.

Θεώρημα παραλλήλων αξόνων

$$I_A = I_{cm} + M \cdot R^2 \Rightarrow I_A = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2 + M \cdot R^2 \Rightarrow I_A = \frac{3}{2} \cdot M \cdot R^2$$

$$\Sigma\tau = I_A \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow M \cdot g \cdot \eta\mu\varphi \cdot R = \frac{3}{2} \cdot M \cdot R^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{100}{3} \frac{rad}{s^2}$$

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma\tau \cdot \omega = I_A \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot t = \frac{3}{2} \cdot M \cdot R^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}^2 \cdot t \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 100\frac{J}{s}$$

Μπορείτε να εκτυπώσετε τις λύσεις σε μορφή pdf από εδώ και τα θέματα από εδώ

← Previous Archive Next →