Στη στήλη "Μέσα στην τάξη" παρουσιάζονται ιδέες, πρακτικές και σχέδια μαθήματος που έχουν εφαρμοστεί στην τάξη και προτείνουν μια πρωτότυπη, διαφορετική, καινοτόμα διδακτική προσέγγιση που προκαλεί το ενδιαφέρον στα παιδιά.

Κάνοντας Φυσική με τα λογισμικά Geogebra, Step και Mathematica στη σχολική τάξη

Παναγιώτης Πετρίδης

Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε τα λογισμικά Geogebra, Step και Mathematica μελετώντας την κεντρική ελαστική κρούση μεταξύ δύο όμοιων σφαιρών και την φθίνουσα ταλάντωση. Τα θέματα αναπτύσσονται στο σχολικό εγχειρίδιο Φυσικής Γ' Γενικού Λυκείου της Ομάδας Προσανατολισμού των Θετικών Σπουδών ωστόσο η δική μας θεώρηση αφορά στη μελέτη των φαινομένων με την βοήθεια των λογισμικών άρα είναι περισσότερο "βιωματική". Σκοπός της μελέτης είναι η διδακτική αξιοποίηση των συγκεκριμένων λογισμικών στην καθημερινή πρακτική της σχολικής τάξης.

Κεντρική ελαστική κρούση - Θεωρητική εισαγωγή

Έστω δύο σφαίρες 1 και 2 σε μια περιοχή του σύμπαντος (άξονας x) μακριά από κάθε άλλο αστρικό αντικείμενο. Επειδή ο κενός χώρος είναι ομοιογενής, εάν αλλάξουν οι θέσεις των σφαιρών χωρίς να αλλάξει η μεταξύ τους απόσταση x, η δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο σφαιρών παραμένει ίδια. Αυτό συμβαίνει διότι η δυναμική ενέργεια είναι μια συνάρτηση τριών μεταβλητών $f(m_1, m_2, x)$ όπου m_1 και m_2 οι μάζες των σφαιρών που δεν εξαρτώνται από την τυχαία θέση τους και x η απόσταση μεταξύ των μαζών. Αλλαγή στην απόσταση μεταξύ των σφαιρών 1 και 2 μπορεί να γίνει με δύο ισοδύναμους τρόπους. Είτε μετακινώντας την σφαίρα 1 κατά $\Delta\overrightarrow{x_\alpha}$, είτε μετακινώντας την σφαίρα 2 κατά

$$\Delta\overrightarrow{x_\beta} = -\Delta\overrightarrow{x_\alpha}$$

Λόγω της ομοιογένειας του χώρου οι δύο μεταβολές της δυναμικής ενέργειας είναι ίσες. Η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας συνδέεται με το έργο του βάρους με τη σχέση

$$\Delta U = -W$$

Το έργο είναι χονδρικά το γινόμενο δύναμης επί μετατόπιση ή ακριβέστερα η ποσότητα

$$\int \vec{F}\, d\vec{x}$$

Άρα ισχύει (Οικονόμου, 1992):

$$\Delta U_\alpha = \Delta U_\beta \Leftrightarrow -\overrightarrow{F_{\alpha\beta}}\Delta\overrightarrow{x_\alpha} = -\overrightarrow{F_{\beta\alpha}}\Delta\overrightarrow{x_\beta} \Leftrightarrow \overrightarrow{F_{\alpha\beta}} = -\overrightarrow{F_{\beta\alpha}}$$

Ο συλλογισμός μπορεί να γενικευθεί και στις τρεις διαστάσεις. Βλέπουμε δηλαδή ότι η ομοιογένεια του κενού χώρου οδηγεί στον τρίτο νόμο του Νεύτωνα. Για να συνεχίσουμε τον συλλογισμό με την βοήθεια του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα η σχέση

$$\overrightarrow{F_{\alpha\beta}} = -\overrightarrow{F_{\beta\alpha}}$$

γράφεται ως εξής:

$$\overrightarrow{F_{\alpha\beta}} + \overrightarrow{F_{\beta\alpha}} = 0 \Leftrightarrow m_1\overrightarrow{a_\alpha} + m_2\overrightarrow{a_\beta} = 0 \Leftrightarrow m_1\overrightarrow{u_\alpha} + m_2\overrightarrow{u_\beta} = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$$

όπου έγινε χρήση του ορισμού της επιτάχυνσης και φτάσαμε στο νόμο διατήρησης της ολικής ορμής ενός απομονωμένου συστήματος. Η σύνδεση του νόμου της διατήρησης της ορμής με την ομοιογένεια του κενού χώρου προσδίδει σε αυτόν τον νόμο μια οικουμενικότητα που ξεπερνάει τα πλαίσια της κλασικής μηχανικής. Δηλαδή ανεξάρτητα από τον βασικό νόμο της κίνησης, είτε αυτός είναι ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα, είτε είναι οι εξισώσεις του Maxwell, είτε είναι η εξίσωση του Schrödinger, ο νόμος διατήρησης της ορμής ισχύει για κάθε φυσική θεωρία.

Μετά την ομοιογένεια του κενού χώρου, σειρά έχει η ομοιογένεια του χρόνου, δηλαδή το γεγονός ότι δεν υπάρχουν χρονικές στιγμές ή χρονικές περίοδοι που ξεχωρίζουν από τις υπόλοιπες. Δηλαδή για τις σφαίρες 1 και 2 που βρίσκονται σε μια περιοχή του σύμπαντος μακριά από κάθε άλλο αστρικό αντικείμενο, ότι ισχύει σήμερα, ίσχυε χθες και θα ισχύει και αύριο. Με άλλα λόγια κάθε χρονική στιγμή είναι καθ' εαυτή ισοδύναμη με οποιαδήποτε άλλη. Η προφανής αυτή ιδιότητα του χρόνου έχει σαν άμεση συνέπεια ότι η δυναμική ενέργεια ενός απομονωμένου συστήματος δεν είναι δυνατόν να εξαρτάται ρητά από τον χρόνο, αλλά όπως αναφέραμε πριν εξαρτάται μόνο από τις σχετικές θέσεις των σωμάτων. Έτσι για την μεταβολή της δυναμικής ενέργειας ισχύει (Οικονόμου, 1992):

$$\Delta U = \Delta U_\alpha + \Delta U_\beta = -\overrightarrow{F_{\alpha\beta}}\Delta\overrightarrow{x_\alpha} - \overrightarrow{F_{\beta\alpha}}\Delta\overrightarrow{x_\beta}$$

χρησιμοποιώντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$F_{\alpha\beta}dx_\alpha = m_1\frac{du_\alpha}{dt}dx_\alpha = m_1 du_\alpha\frac{dx_\alpha}{dt} = m_1 du_\alpha u_\alpha = \frac{d(m_1u_\alpha^2)}{2}$$

$$F_{\beta\alpha}dx_\beta = m_2 du_\beta u_\beta = \frac{d\left(m_2u_\beta^2\right)}{2}$$

$$dU = \frac{-d(m_1u_\alpha^2)}{2} - \frac{d\left(m_2u_\beta^2\right)}{2} = -d\left(\frac{m_1u_\beta^2}{2} + \frac{m_1u_\alpha^2}{2}\right)$$

$$du = -dK \Leftrightarrow dU + dK = 0 \Leftrightarrow U + K = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$$

όπου εξ' ορισμού

$$K = \frac{1}{2}m_1u_\alpha^2 + \frac{1}{2}m_2u_\beta^2$$

είναι η κινητική ενέργεια του συστήματος. Με βάση την ομοιογένεια του χρόνου καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι η ολική ενέργεια ενός απομονωμένου συστήματος, που είναι το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας, παραμένει σταθερή. Έτσι στην κλασική Φυσική στηριζόμενοι στις συμμετρίες (Τραχανάς, 1996), η ομοιογένεια του χώρου και του χρόνου οδηγεί στην διατήρηση της ορμής και της ενέργειας, ενώ στην σχετικιστική Φυσική η ομοιογένεια του χώρο-χρόνου οδηγεί στην διατήρηση του τετρανύσματος της ορμής με συνιστώσες ενέργειας και ορμής.

Μετά από αυτή την παρουσίαση ακολουθεί εφαρμογή των αρχών διατήρησης της ενέργειας και της ορμής στην κεντρική ελαστική κρούση δύο σφαιρών. Κατά την διάρκεια μιας κρούσης σε κάθε σφαίρα αναπτύσσονται πολύ μεγάλες δυνάμεις για μικρό χρονικό διάστημα. Οι κρούσεις ταξινομούνται συνήθως, σύμφωνα με το αν διατηρείται ή όχι η κινητική ενέργεια. Στη δική μας μελέτη περίπτωσης, διατηρείται η κινητική ενέργεια δηλαδή λέμε ότι η κρούση είναι ελαστική. Επίσης οι διευθύνσεις των ταχυτήτων των σφαιρών πριν την κρούση βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία και γι' αυτό τον λόγο η κρούση ονομάζεται κεντρική. Η μία από τις δύο σφαίρες είναι αρχικά ακίνητη, οπότε η εφαρμογή των σχέσεων μας δίνει (Ιωάννου, 2015), για τα μέτρα των ταχυτήτων των σφαιρών μετά την κρούση το παρακάτω αποτέλεσμα που θα μελετήσουμε.

$$u_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}u_1 \text{ και } u_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}u_1$$

Geogebra και μελέτη γραφικής παράστασης

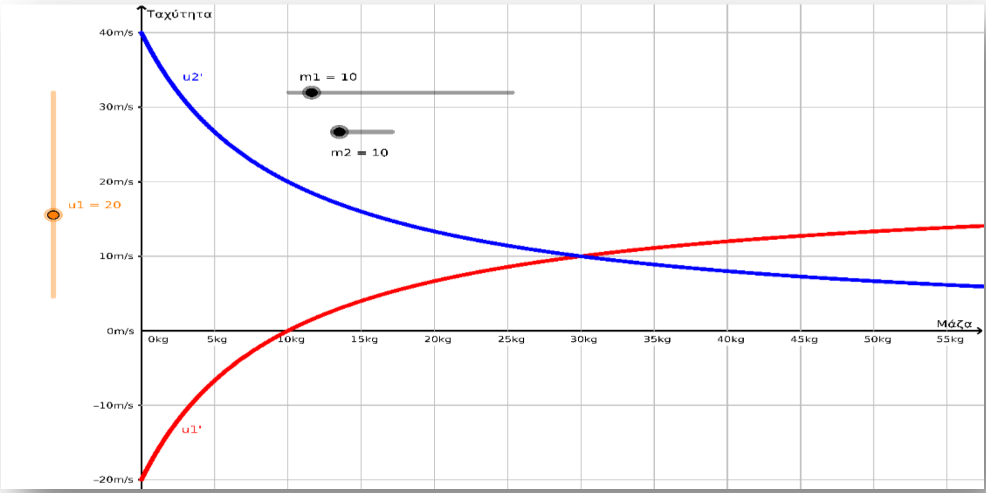
Το Geogebra (https://www.geogebra.org/, 2016) που ετυμολογικά προέρχεται από την σύνθεση των όρων Γεωμετρία (Geometry) και Άλγεβρα (Algebra), αποτελεί διαδραστικό λογισμικό γεωμετρίας για εκπαιδευτικούς σκοπούς. Τα περισσότερα τμήματά του αποτελούν ελεύθερο λογισμικό. Το Geogebra έχει γραφτεί σε γλώσσα Java και συνεπώς διατίθεται για όλες τις διαθέσιμες πλατφόρμες (Windows, Mac, Linux). Επίσης μπορούμε να το τρέξουμε online και χωρίς εγκατάσταση τοπικά, μέσω ενός φυλλομετρητή. Για τη μελέτη μας με το Geogebra θα σχεδιάσουμε γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων μιας μεταβλητής με την βοήθεια δρομέων, όπως επίσης και γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων δύο μεταβλητών. Η τριδιάστατη απεικόνιση είναι ένα χαρακτηριστικό που είναι πλέον διαθέσιμο στην τελευταία έκδοση Geogebra 5. Η χρήση των δρομέων στην θέση των συντελεστών των συναρτήσεων, μας δίνει την δυνατότητα να μελετήσουμε ειδικές περιπτώσεις και να βγάλουμε συμπεράσματα που σχετίζονται με την φυσική ερμηνεία και επεξήγηση των σχέσεων των ταχυτήτων των σφαιρών μετά την κεντρική ελαστική κρούση τους.

Ξεκινώντας με το Geogebra, δημιουργούμε τρεις δρομείς: έναν για την αρχική ταχύτητα u_1 που έχει η μάζα m_1, έναν για την μάζα m_1 και έναν για την μάζα m_2. (Το αρχείο είναι διαθέσιμο στο δικτυακό τόπο του περιοδικού, ως υποστηρικτικό υλικό, με την ονομασία taxytita.ggb). Στην παρακάτω Εικόνα 1, έχουμε σχεδιάσει με κόκκινο χρώμα τη συνάρτηση της ταχύτητας της πρώτης σφαίρας μάζας m_1 μετά την κρούση, με μεταβλητή z την μάζα m_1:

$$u_1{}'(z) = \frac{z - m_2}{z + m_2} u_1$$

ενώ με μπλε χρώμα έχουμε σχεδιάσει την συνάρτηση της ταχύτητας της δεύτερης σφαίρας μάζας m_2 μετά την κρούση με μεταβλητή y τη μάζα m_2

$$u_2{}'(y) = \frac{2m_1}{m_1 + y} u_1$$



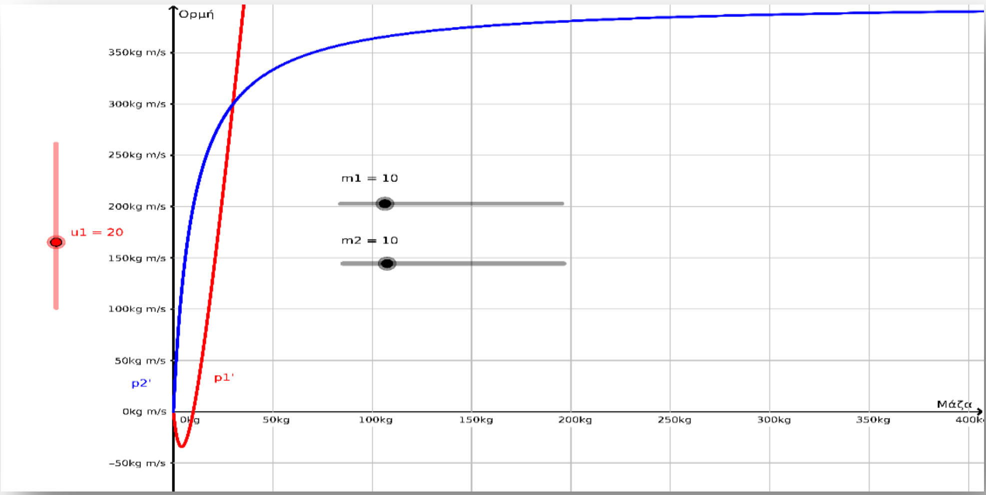
Εικόνα 1. Οι ταχύτητες των δύο σφαιρών ως συνάρτηση των μαζών τους

Στην εικόνα που πήραμε από το Geogebra οι δρομείς έχουν αρχικές τιμές για την ταχύτητα του πρώτου σώματος $u_1 = 20\frac{m}{s}$ και για τις μάζες $m_1 = m_2 = 10$ kg. Συνεχίζουμε με τη μελέτη της ορμής των δύο σφαιρών μετά την κρούση. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με το Geogebra, δημιουργούμε τρεις δρομείς έναν για την αρχική ταχύτητα u_1 που έχει η μάζα m_1, έναν για την μάζα m_1 και έναν για την μάζα m_2. (Το αρχείο είναι διαθέσιμο στο δικτυακό τόπο του περιοδικού, ως υποστηρικτικό υλικό, με την ονομασία ormi.ggb). Στην Εικόνα 2 έχουμε σχεδιάσει με κόκκινο χρώμα την συνάρτηση της ορμής της πρώτης σφαίρας μάζας m_1 μετά την κρούση, με μεταβλητή z την μάζα m_1

$$p_1{}'(z) = \frac{z - m_2}{z + m_2} u_1 z$$

ενώ με μπλε χρώμα έχουμε σχεδιάσει την συνάρτηση της ορμής της δεύτερης σφαίρας μάζας m_2 μετά την κρούση με μεταβλητή y την μάζα m_2

$$p_2{}'(y) = \frac{2m_1}{m_1 + y} u_1 y$$



Εικόνα 2. Οι ορμές των δύο σφαιρών ως συνάρτηση των μαζών τους

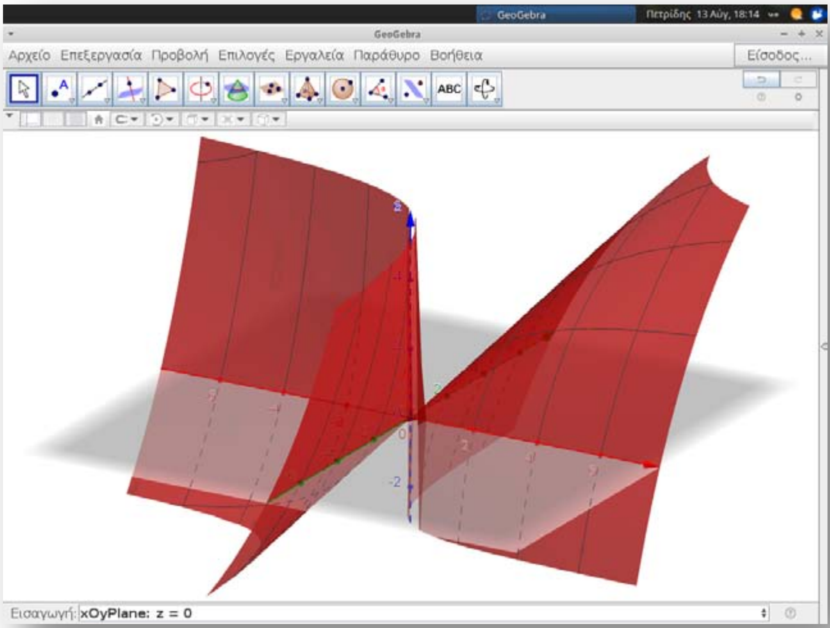
Στην εικόνα που πήραμε από το Geogebra, οι δρομείς έχουν αρχικές τιμές για την ταχύτητα της πρώτης σφαίρας $u_1 = 20\frac{m}{s}$ και για τις μάζες $m_1 = m_2 = 10$ kg.

Σε αυτό το σημείο της μελέτης εμφανίζεται για τους μαθητές κάτι απροσδόκητο. Μια υποθετική σκέψη που αντιτίθεται στη βασική ιδέα που έχουν αναπτύξει κατά την διάρκεια των σπουδών τους στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση όσον αφορά τα μεγέθη ταχύτητα και ορμή. Ποια είναι η συμπεριφορά αυτών των μεγεθών για την δεύτερη σφαίρα, όταν η μάζα της τείνει προς το άπειρο; Η μελέτη των παραπάνω συναρτήσεων μπορεί να γίνει με τον παραδοσιακό τρόπο (Ανδρεαδάκης, 2014), όμως εμείς τις μελετήσαμε γραφικά με την βοήθεια του λογισμικού Geogebra και φτάσαμε στο συμπέρασμα ότι όταν η μάζα της δεύτερης σφαίρας τείνει στο άπειρο, η ταχύτητά της τείνει στο μηδέν (Εικόνα 1, μπλε γραμμή) και η ορμή της γίνεται μέγιστη (Εικόνα 2, μπλε γραμμή). Και ενώ η συμπεριφορά του μεγέθους της ταχύτητας συμφωνεί με αυτά που περιμένει η λογική των μαθητών, αφού μια τεράστια σφαίρα (μάζα τείνει στο άπειρο), μετά την κρούση ουσιαστικά δεν κινείται, η συμπεριφορά του μεγέθους της ορμής είναι για τους μαθητές μη αναμενόμενη. Σύμφωνα με την λογική τους αφού το μέγεθος της ταχύτητας μηδενίζεται θα πρέπει να μηδενίζεται και το μέγεθος της ορμής. Το παράδοξο για τους μαθητές προκύπτει από την εσφαλμένη αντίληψή τους σύμφωνα με την οποία εάν πολλαπλασιάσουν ένα μέγεθος που τείνει στο μηδέν (ταχύτητα) με ένα μέγεθος που τείνει στο άπειρο (μάζα) το τελικό αποτέλεσμα θα είναι μηδέν. Και αυτή η εσφαλμένη αντίληψη προκύπτει από την μηδενική ιδιότητα (Τσιάκαλος, 2010) του πολλαπλασιασμού (ή όπως συχνά αναφέρεται στα μαθηματικά το μηδέν ως απορροφητικό στοιχείο), όπου οποιοσδήποτε αριθμός που πολλαπλασιάζεται με το μηδέν γίνεται μηδέν. Εσφαλμένη διότι το άπειρο δεν είναι αριθμός, άρα δεν μπορεί να πολλαπλασιαστεί με το μηδέν.

Στην Εικόνα 3 δίνεται η τρισδιάστατη απεικόνιση της συνάρτησης της ορμής της δεύτερης σφαίρας με μεταβλητές z και y τις μάζες m_1 και m_2 των δύο σφαιρών. Η απεικόνιση της συνάρτησης

$$p_2'(z,y) = \frac{2zy}{z+y}u_1$$

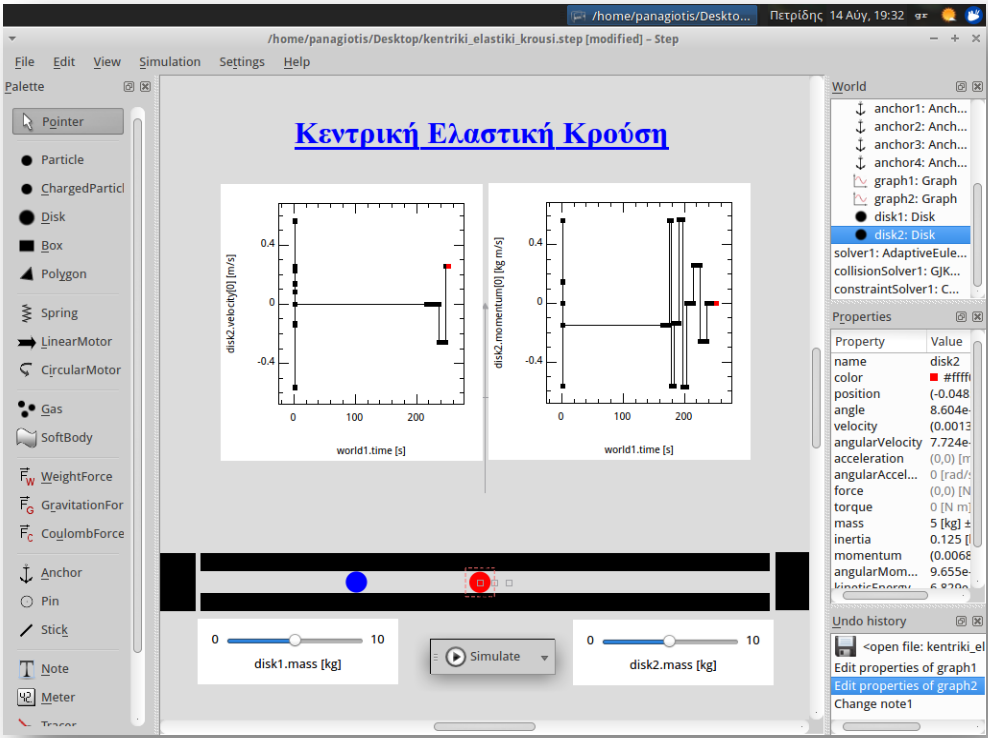
μπορεί να άρει το "αδιέξοδο" στη σκέψη των μαθητών, αφού έχουν την δυνατότητα να μελετήσουν την συμπεριφορά της ορμής της δεύτερης σφαίρας καθώς μεταβάλλονται ταυτόχρονα οι μάζες της πρώτης και της δεύτερης σφαίρας. (Το αντίστοιχο αρχείο είναι διαθέσιμο στο δικτυακό τόπο του περιοδικού, ως υποστηρικτικό υλικό, με την ονομασία 3D_ormi.ggb).



Εικόνα 3. η τρισδιάστατη απεικόνιση της συνάρτησης της ορμής της δεύτερης σφαίρας

Step ένας εικονικός κόσμος

Το έτερο λογισμικό ανοικτού κώδικα που χρησιμοποιούμε είναι το Step (https://edu.kde.org/step/, 2016). Πρόκειται για ένα διαδραστικό λογισμικό προσομοίωσης του φυσικού κόσμου. Αποτελεί τμήμα μιας ευρύτερης σουίτας προγραμμάτων ανοικτού κώδικα που ακούει στο όνομα "KDE Edu". Τα προγράμματα αυτά είναι διαθέσιμα εκτός από το λειτουργικό linux και σε λειτουργικά συστήματα Windows, αλλά και σε Android. Με το λογισμικό Step μπορούμε να δημιουργήσουμε έναν εικονικό κόσμο, τοποθετώντας σωματίδια με ιδιότητες όπως μάζα, ταχύτητα έως ελατήρια και φορτισμένα σώματα, που επηρεάζουν την προσομοίωση. Ο χρήστης μπορεί επίσης να προσθέσει δυνάμεις βαρύτητας ή δυνάμεις Coulomb και με αυτό τον τρόπο να δημιουργήσει το δικό του πειραματικό κόσμο. Στο λογισμικό τέλος ο χρήστης έχει διαθέσιμα γραφήματα που αναπαριστούν τα διάφορα φυσικά μεγέθη, όπως θέση ταχύτητα, επιτάχυνση, δύναμη και ενέργεια. Το λογισμικό καθιστά την μελέτη περισσότερο βιωματική και ευθυγραμμίζεται με τους θεμελιώδης τύπους μάθησης που αποτελούν τους τέσσερις πυλώνες της εκπαίδευσης όπως ορίστηκαν από την Διεθνή Επιτροπή για την Εκπαίδευση του 21ου αιώνα (http://bit.ly/2bJ2X82, International Commision on Education for the 21st Century, 85) δηλαδή, α) την μάθηση του πώς να μαθαίνεις, β) την μάθηση του πώς να ενεργείς, γ) την μάθηση του πώς να συμβιώνεις να συν υπάρχεις με άλλους και δ) την μάθηση του να πώς να υπάρχεις αφ' εαυτού σου.



Εικόνα 4. Στιγμιότυπο εικονικού κόσμου για τη μελέτη της κεντρικής ελαστική κρούσης

Στην εικόνα 4 φαίνεται ένα στιγμιότυπο από τον εικονικό κόσμο που κατασκευάστηκε με το λογισμικό Step για την μελέτη της κεντρικής ελαστικής κρούσης. Στο δικτυακό τόπο του περιοδικού είναι διαθέσιμο ως υποστηρικτικό υλικό το αρχείο krousi.step στο οποίο δημιουργήσαμε έναν κλειστό διάδρομο χρησιμοποιώντας κατάλληλα διαμορφωμένα κουτιά (boxes) τα οποία και ακινητοποιήσαμε με τη βοήθεια του εργαλείου της άγκυρας (anchor). Μέσα στο διάδρομο τοποθετήθηκαν δύο κυκλικοί δίσκοι (disk1 και disk2) οι μάζες των οποίων μπορούν να μεταβληθούν με την βοήθεια ελεγκτών (controller1 και controller2). Οι γραφικές παραστάσεις που εμφανίζονται στην Εικόνα 4 είναι οι χρονικές συναρτήσεις της ταχύτητας και της ορμής της δεύτερης σφαίρας μετά την κεντρική ελαστική κρούση.

Μεταβάλλουμε την αρχική ταχύτητα κάθε δίσκου είτε με τη βοήθεια του πίνακα properties ή και απευθείας μέσα στον εικονικό κόσμο με την βοήθεια του δείκτη ταχύτητας. Διαλέξαμε να μην χρησιμοποιήσουμε βαρυτικές δυνάμεις, όπως και δυνάμεις τριβής ολίσθησης. Η αξία του λογισμικού έγκειται στην απειρία των δυνατών περιπτώσεων που μπορούμε να μελετήσουμε όπως και στην ευκολία με την οποία πραγματοποιούνται τυχόν αλλαγές. Για το εύρος των τιμών που μπορούν να πάρουν οι ελεγκτές της μάζας των δίσκων επιλέξαμε την περιοχή από 0 έως 10 kg, διότι εμφανίζονται προβλήματα στην προσομοίωση όταν η μάζα “απειρίζεται” δηλαδή γίνεται πάνω από 10^6 kg.

Φθίνουσα ταλάντωση – Mathematica

Ταλάντωση ονομάζεται μια περιοδική παλινδρομική κίνηση. Η ταλάντωση που γίνεται σε ευθεία τροχιά ονομάζεται γραμμική ταλάντωση. Για να εκτελεί ένα σώμα γραμμική ταλάντωση θα πρέπει να ασκείται σε αυτό συνισταμένη δύναμη της μορφής

$$\vec{F} = -D\vec{x}$$

Η δύναμη F ονομάζεται δύναμη επαναφοράς γιατί τείνει να επαναφέρει το σώμα στην θέση ισορροπίας. Η σταθερά D ονομάζεται σταθερά επαναφοράς και x είναι η απομάκρυνση του σώματος από την θέση ισορροπίας. Φθίνουσα είναι μια ειδική περίπτωση γραμμικής ταλάντωσης σύμφωνα με την οποία ένα σώμα κινείται παλινδρομικά πάνω σε έναν άξονα γύρω από ένα σημείο O το οποίο ονομάζουμε σημείο αναφοράς. Στην φθίνουσα ταλάντωση η ενέργεια του κινητού συνεχώς μειώνεται. Η ελάττωση της ενέργειας οφείλεται σε μια μη συντηρητική δύναμη που ονομάζεται απόσβεση (Κουζούδης & Πετρίδης, 2015). Τέτοια δύναμη είναι για παράδειγμα η δύναμη τριβής που εμφανίζεται στην κίνηση ενός σώματος που εμβαπτίζεται μέσα σε ρευστό όπως το νερό. Η δύναμη απόσβεσης έχει τη μορφή:

$$\vec{F} = -b\vec{u}$$

Το πρόσημο (-) εξηγείται από το γεγονός ότι η δύναμη απόσβεσης είναι ουσιαστικά μια δύναμη τριβής και έχει πάντα φορά αντίθετη από αυτή της ταχύτητας υ. Η σταθερά b ονομάζεται σταθερά απόσβεσης και εξαρτάται από τις ιδιότητες του μέσου καθώς και από το σχήμα και το μέγεθος του αντικειμένου που κινείται. Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την φθίνουσα ταλάντωση είναι μια γραμμική ομογενής διαφορική εξίσωση 2ας τάξης και προκύπτει από τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα ως εξής:

$$\Sigma F = ma \Leftrightarrow -Dx - bv = ma \Leftrightarrow mx'' + bx' + Dx = 0$$

Η σταθερά που εξαρτάται από την σταθερά απόσβεσης b και τη μάζα m του ταλαντούμενου σώματος συμβολίζεται με Λ και ονομάζεται εκθέτης απόσβεσης

$$\Lambda = \frac{b}{2m}$$

και ένα χαρακτηριστικό για το κάθε ταλαντούμενο σύστημα είναι η ιδιοσυχνότητα ω_o που δίνεται από την σχέση

$$\omega_o^2 = \frac{D}{m}$$

Με χρήση του εκθέτη απόσβεσης και της ιδιοσυχνότητας του συστήματος η διαφορική εξίσωση για την φθίνουσα ταλάντωση γίνεται (Μαχαίρας, 2009):

$$x'' + 2\Lambda x' + \omega_o^2 \chi = 0$$

Οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης είναι τρεις τελείως διαφορετικές συναρτήσεις. Έτσι ανάλογα με την σχέση που υπάρχει μεταξύ των σταθερών D, b, και m, το κινητό μπορεί να εκτελέσει τρεις διαφορετικές κινήσεις.

Κάνοντας χρήση του λογισμικού Mathematica βρίσκουμε τις λύσεις για διάφορες τιμές του Λ και του ω_o, και σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων που αποτελούν λύσεις της διαφορικής εξίσωσης. Το Mathematica είναι ένα υπολογιστικό πακέτο με πάρα πολλές δυνατότητες σε σχεδόν όλους τους τομείς των μαθηματικών (Άλγεβρα, Θεωρία συνόλων, Ανάλυση, διαφορικές εξισώσεις, Στατιστική). Για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης κάνουμε χρήση της εντολής DSolve (Τραχανάς, 2004). Η γενική δομή της εντολής, όταν η διαφορική εξίσωση συνοδεύεται και από αρχικές συνθήκες είναι:

DSolve[{Εξίσωση, Αρχικές συνθήκες}, y[x], x]

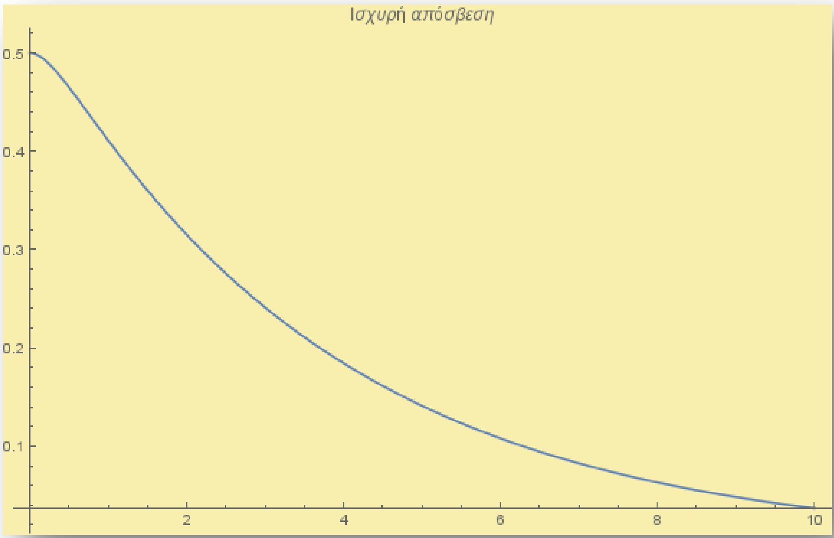
Οι τιμές που χρησιμοποιήσαμε για τις αρχικές συνθήκες είναι:

$$x_o = 0.5m, u_o = 0\frac{m}{s}$$

- για την περίπτωση $\Lambda>\omega_o$ ($\Lambda=2s^{-1}$, ω_o=1rad/s) ισχυρή απόσβεση:

DSolve[{x''[t] + 4 x'[t] + x[t] == 0, x[0] == 0.5, x'[0] == 0}, x[t], t]

Plot[x[t] /. %, {t, 0, 10}, PlotRange -> All]

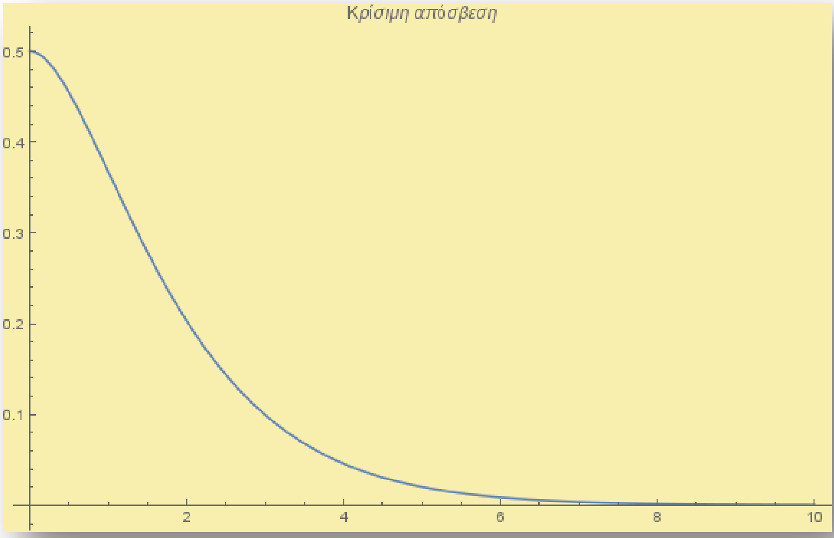


Εικόνα 5. Η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με το χρόνο για ισχυρή απόσβεση

- για την περίπτωση $\Lambda=\omega_o$ ($\Lambda=1s^{-1}$, ω_o=1rad/s) κρίσιμη απόσβεση:

DSolve[{x''[t] + 2 x'[t] + x[t] == 0, x[0] == 0.5, x'[0] == 0}, x[t], t]

Plot[x[t] /. %, {t, 0, 10}, PlotRange -> All]

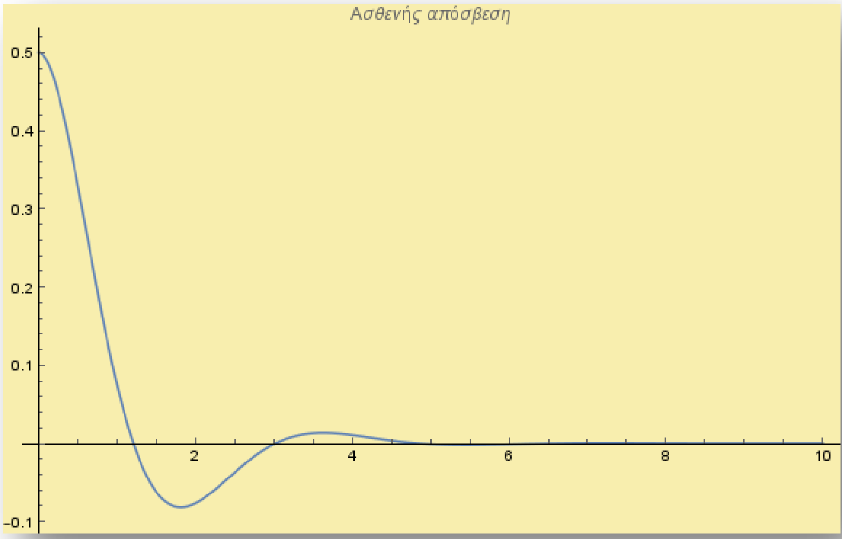


Εικόνα 6. Η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με το χρόνο για κρίσιμη απόσβεση

- για την περίπτωση $\Lambda<\omega_o$ ($\Lambda=1s^{-1}$, $\omega_o=2rad/s$) ασθενής απόσβεση 1η:

DSolve[{x''[t] + 2 x'[t] + 4 x[t] == 0, x[0] == 0.5, x'[0] == 0}, x[t], t]

Plot[x[t] /. %, {t, 0, 10}, PlotRange -> All]

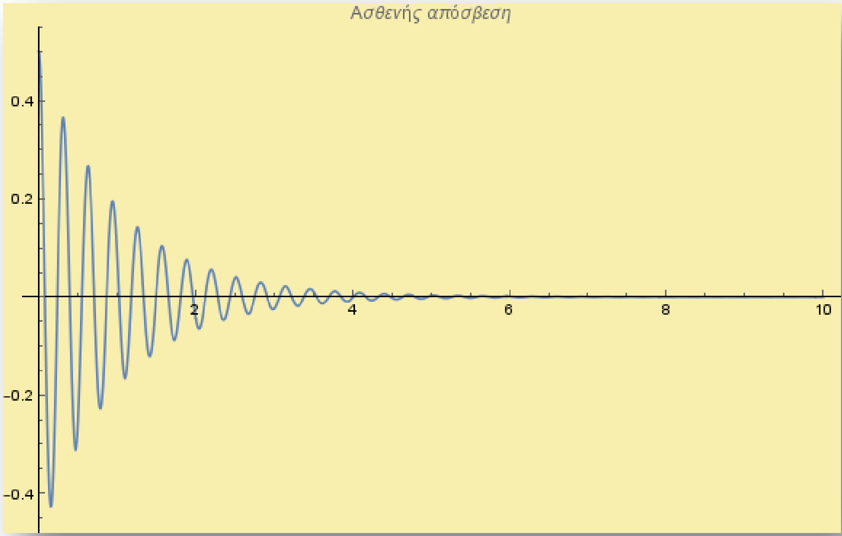


Εικόνα 7. Η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με το χρόνο για ασθενή απόσβεση

- για την περίπτωση $\Lambda<\omega_o$ ($\Lambda=1s^{-1}$, $\omega_o=20rad/s$) ασθενής απόσβεση 2η:

DSolve[{x''[t] + 2 x'[t] + 400 x[t] == 0, x[0] == 0.5, x'[0] == 0}, x[t], t]

Plot[x[t] /. %, {t, 0, 10}, PlotRange -> All]



Εικόνα 8. Η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με το χρόνο για ασθενή απόσβεση

Συμπεράσματα

Η διδασκαλία με τη χρήση των λογισμικών Geogebra, Step, και Mathematica επιφυλάσσει ενεργό ρόλο και για τους μαθητές. Οι μαθητές είναι σε θέση να δημιουργήσουν περιεχόμενο, δηλαδή φωτογραφίες και βίντεο, κάνοντας χρήση του εικονικού κόσμου, οπότε τα εικονικά αντικείμενα που παράγονται και ο τρόπος που αυτά αλληλεπιδρούν μπορούν να αποτελέσουν πεδίο υποβολής ερωτήσεων και συζητήσεων και με το διδάσκοντα αλλά και μεταξύ τους. Η μάθηση συγκεκριμένα κατά την αλληλεπίδραση με το λογισμικό Step, δηλαδή ένα λογισμικό προσομοίωσης, μπορεί να επικεντρώνεται ή να αφορά σε (Δημητρακοπούλου, 1999): α) εντοπισμό των κατάλληλων μεταβλητών, β) τρόπο επίδρασης των μεταβλητών, γ) στρατηγική διερεύνησης ενός φαινομένου, δ) «ευκολία» χειρισμού των μεταβλητών, ε) μοντέλα γεγονότα και προϋποθέσεις που δεν τίθενται υπό εξέταση στ) από την «πιστή» προσομοίωση στην προσομοίωση «καρικατούρα» της πραγματικότητας, ζ) σύγχυση με την πραγματικότητα και η) διπλές απλουστεύσεις και απλοποιήσεις.

Συμπερασματικά η χρήση των συγκεκριμένων λογισμικών από τους διδάσκοντες καθηγητές δίνει μια νέα διάσταση στην παρουσίαση της ύλης, αποτελεί ευκαιρία διαθεματικής (Φυσική, μαθηματικά, πληροφορική) αντιμετώπισης, αλλά ωθεί και τους ίδιους τους μαθητές στη δοκιμή και μεταγενέστερα στην ενασχόληση με τα συγκεκριμένα λογισμικά. Μεταβάλλει έτσι σταδιακά τους μαθητές από παθητικούς ακροατές σε ενεργούς συμμέτοχους σε συζητήσεις, σε ομάδες και σε δραστηριότητες που επιβεβαιώνουν το επίπεδο κατανόησης του μαθήματος, όπως η συγγραφή κειμένου, η διεξαγωγή πειραμάτων και οι μελέτες διαφορετικών περιπτώσεων.

Αναφορές

Ανδρεαδάκης, Σ. κ.ά. (2014). *Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης Γ' τάξη Γενικού Λυκείου*, Ι.Τ.Υ.Ε Διόφαντος, σ. 287.

Δημητρακοπούλου, Α. (1999). *Επιθεώρηση Φυσικής,* 3η Περίοδος, Vol. Η', Νο 30, 48.

Ιωάννου Α, κ.ά. (2015). *Φυσική Γ' Γενικού Λυκείου, Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών*, Ι.Τ.Υ.Ε Διόφαντος, σ. 156.

Κουζούδης, Δ & Πετρίδης, Π. (2015). *Φυσική Ι. Μηχανική – Κυματική*, Εκδόσεις Συμμετρία, σ. 253.

Μαχαίρας, Θ. (2009). *Θέματα Φυσικής παρανοήσεις και προτάσεις υπέρβασης τους*. Διαθέσιμο στη διεύθυνση: http://bit.ly/2gMxra3 , 55

Οικονόμου, Ε.Ν. (1992). *Η Φυσική σήμερα Ι. Τα θεμέλια*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, σ. 29.

Τραχανάς, Σ. (2004). *Mathematica και εφαρμογές*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, σ. 22.

Τραχανάς, Σ. (1996). *Κβαντομηχανική Ι. Θεμελιώδεις αρχές – Μονοδιάστατα προβλήματα*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, σ. 255.

Τσιάκαλος Γ. κ.ά. (2010). *Πρόγραμμα σπουδών Μαθηματικών, Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών*, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου, σ. 38

Ο Παναγιώτης Σ. Πετρίδης γεννήθηκε στη Θεσσαλονίκη το 1969. Έλαβε πτυχίο Φυσικής από το Α.Π.Θ. το 1992 και Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης στα Πληροφοριακά Συστήματα από το Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο το 2012. Η διπλωματική του εργασία με τίτλο "Μελέτη και χρήση των υπηρεσιών κοινωνικής δικτύωσης στην ηλεκτρονική μάθηση" είχε σαν αποτέλεσμα την δημιουργία ενός πληροφοριακού συστήματος για εκπαιδευτική χρήση από τους φοιτητές του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου.